Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias

Leonidas Cerda Romero
Janneth Morocho Yaucán



ESPOCH
2018

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Leonidas Cerda Romero
Janneth Morocho Yaucán





INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Panamericana Sur, kilómetro 1 $^{1}/_{2}$
Dirección de Publicaciones Científicas
Riobamba, Ecuador
Teléfono: (593 3) 299 8200
Código Postal: EC060155

Aval ESPOCH

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego (*peer review*).

Corrección y diseño:
La Caracola Editores

Impreso en Ecuador

CDU: 517.91
Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo
Dirección de Publicaciones, año 2017
173 pp. vol: 17 x 24 cm
ISBN: 978-9942-35-642-0
1. Análisis matemático
2. Cálculo diferencial
3. Cálculo integral
4. Ecuaciones diferenciales ordinarias

Contenido General

Índice de figuras

Prólogo

El presente texto ha sido elaborado pensando en entregar material para un curso introductorio de ecuaciones diferenciales ordinarias. En éste se tratan los tipos más comunes de ecuaciones diferenciales, así como sus métodos de resolución.

El texto ha sido diseñado de tal forma que los lectores tengan primero una panorámica general de los temas tratados. Se han incluido las demostraciones de algunos resultados que son propias de los autores pero, se las puede hallar en la mayoría de textos introductorios a las ecuaciones diferenciales. Se han realizado ejemplos detallados para un entendimiento adecuado de los procesos que están involucrados en la resolución de cada tipo de ecuación.

La obra ha sido desarrollada en tres capítulos, cada uno de los cuales comienza con una visión general de los temas tratados en el transcurso de los mismos. El capítulo 1 realiza un tratamiento bastante completo de las ecuaciones diferenciales de primer orden. El capítulo 2 trata las ecuaciones diferenciales de orden superior, sus métodos resolutivos y algunas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden. El capítulo 3 está dedicado al estudio de los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales.

Se piensa tratar temas referentes a la transformada de Laplace y su aplicación a la resolución de problemas con condiciones iniciales, así como la teoría de las series de Fourier en un segundo tomo.

Leonidas Cerda – Janneth Morocho

Capítulo 1

Ecuaciones diferenciales de primer orden

La teoría de las ecuaciones diferenciales es una aplicación directa del cálculo diferencial e integral. El cálculo diferencial es una herramienta poderosa para la construcción de modelos matemáticos de problemas en los cuales están involucrados la variación de una o varias variables, las variables dependientes, con respecto a otra u otras variables, las variables independientes.

Determinar el crecimiento poblacional, calcular el decaimiento radioactivo, hallar la edad de un fósil, son problemas en los cuales se utiliza el cálculo diferencial para el planteamiento de un modelo matemático.

El modelo matemático que se construye para hallar la solución de un problema particular deja planteado un nuevo problema: ¿qué herramientas se deben utilizar para hallar la solución del modelo matemático? El cálculo integral es quizá la herramienta matemática más usada en la resolución de modelos matemáticos que describen la variación de ciertas cantidades con respecto a otras.

Este capítulo esta dividido en cuatro secciones. La sección 1.1 muestra algunos ejemplos de modelos matemáticos que describen la variación de una variable con respecto a otra. En la sección 1.2 se defininen conceptos básicos relacionados con las ecuaciones diferenciales, se realiza una clasificación de estas y se estudian las ecuaciones diferenciales separables. La sección 1.3 está dedicada al estudio de ecuaciones diferenciales que se reducen a ecuaciones separables por medio de sustituciones. Finalmente, la sección 1.4 estudia las ecuaciones diferenciales exactas y aquellas que se hacen exactas al multiplicarlas por un factor adecuado, llamado factor de integración.

1.1 Modelos matemáticos

La parte más complicada al usar la matemática para estudiar una aplicación particular es la conversión de fenómenos reales al formalismo matemático. Esto presupone

tácitamente la conversión de hipótesis imprecisas (guiadas por la creencia de que cierto fenómeno real tiene un determinado comportamiento) en fórmulas muy precisas (normalmente fórmulas matemáticas).

Un modelo matemático es una representación, por medio de fórmulas matemáticas, de algo real. El objetivo no es tener una copia exacta de lo real, sino más bien representar las carcaterísticas que a uno le interesa estudiar de la cosa real. La construcción de modelos matemáticos siempre es una tarea complicada. Blanchard [BP, pag. 16-17] sugiere que los pasos básicos en la elaboración de un modelo matemático deben ser los siguientes:

Paso 1. Establecer claramente las hipóteisis en que se basará el modelo. Estas deben describir las relaciones entre las cantidades que se van a estudiar.

Paso 2. Definir completamente las variabes y parámetros que se usarán en el modelo.

Paso 3. Usar las hipótesis formuladas en el paso 1 para obtener ecuaciones que relacionen las cantidades del paso 2.

Observación 1.1. *Cuanto más son las hipótesis involucradas en el paso 1 mayor es la precisión del modelo matemático donde "precisión del modelo" se debe entender de la siguiente manera: supongamos que tenemos dos modelos $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ de $\mathcal{A}$. Decimos que $\mathcal{M}_1$ es más preciso que $\mathcal{M}_2$ cuando $\mathcal{M}_1$ describe mejor el comportamiento de $\mathcal{A}$. Esto no quiere decir que $\mathcal{M}_2$ no sea útil, su utilidad dependerá del interés que tenga quien construye el modelo.*

Un ejemplo bastante sencillo de construcción de un modelo matemático es el crecimiento ilimitado de la población. La hipótesis en la que se basa este modelo es la siguiente:

> "La velocidad de crecimiento de la problación es proporcional al tamaño de la población".

Notamos que esta hipótesis no toma en consideración las limitaciones de espacio o de recursos; sin embargo, es bastante razonable para poblaciones pequeñas en entornos grandes, por ejemplo los primeros brotes de moho en un pan. Hasta aquí hemos

completado el paso 1 de las indicaciones dadas anteriormente por Blanchard. El paso 2 pide determinar las variables y parámetros que serán utilizados en el modelo, en este ejemplo utilizamos las siguientes variables y parámetros:

- t representará el tiempo (variable independiente).
- P representará el tamaño de la población (variable dependiente).
- k representará la constante de proporcionalidad (parámetro) entre la tasa de crecimiento de la población y el tamaño de esta.

Finalmente, el paso 3 pide usar las hipótesis del paso 1 para establecer relaciones entre las cantidades descritas en el paso 2. Utilizando el cálculo diferencial es muy fácil darse cuenta de que: La única relación de ligadura entre las cantidades descritas anteriormente es:

$$\frac{dP}{dt} = kP.$$

Además podemos pedir que $P(t_0) = P_0$ lo cual nos indica que la población en el tiempo $t = t_0$ es igual a P_0. Luego el modelo pide resolver el siguiente problema matemático:

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = kP, \\ P(t_0) = P_0. \end{cases}$$

En la sección 1.2 llamaremos a problema de este tipo “problema con condiciones iniciales”.

La solución de este problema es una función P que satisface tanto la ecuación $\dfrac{dP}{dt} = kP$ como la condicion $P(t_0) = P_0$.

La siguiente figura muestra una posible solución a este problema.

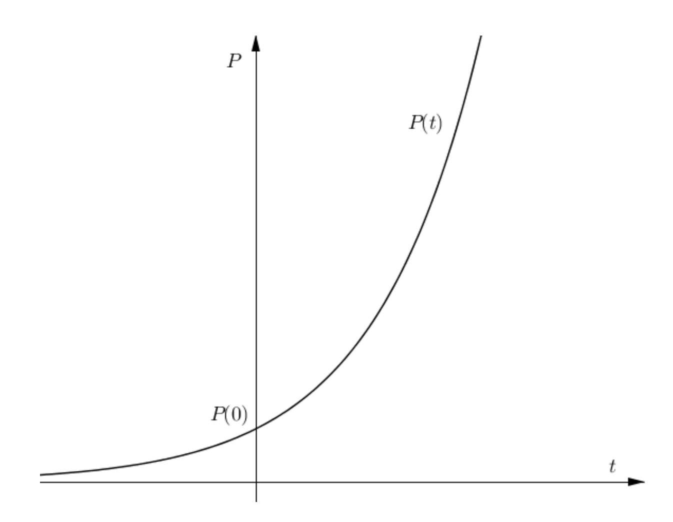


Figura 1.1: Función qu e satisface la ecuación $\dfrac{dP}{dt} = kP$

1.1.1 Ejemplos de modelos matemáticos

A continuación se presentan algunos ejemplos de construcción de modelos. Donde es posible, se presenta la solución al problema matemático que genera el modelo.

Trayectorias ortogonales

Desde la geometría analítica sabemos que dos curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son ortogonales en su punto de intersección si y solo si sus tangentes T_1 y T_2 son perpendiculares en este punto (ver figura 1.2).

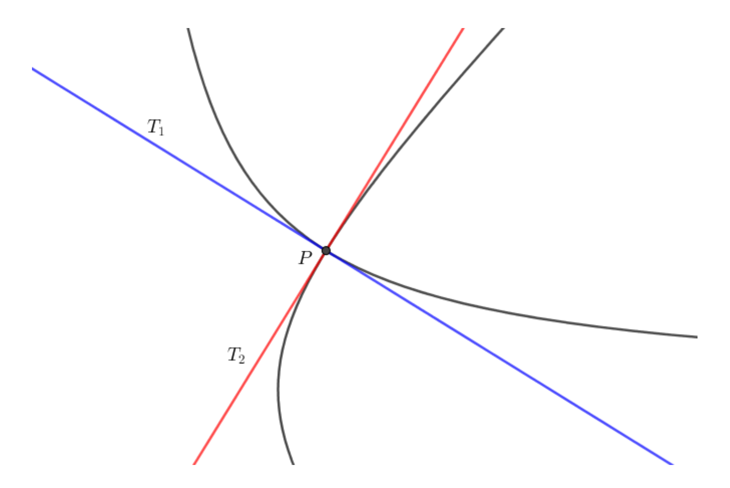


Figura 1.2: Curvas ortogonales en su punto de intersección

La noción de ortogonalidad se puede extender a dos familias de curvas de la siguiente manera:

Definición 1.1. *Sean $G(x, y, c_1)$ y $H(x, y, c_2)$ dos familias de curvas. Se dice que las familias son, cada una, **trayectorias ortogonales** de la otra cuando todas las curvas de $G(x, y, c_1)$ cortan ortogonalmente a todas las curvas de $H(x, y, c_2)$.*

Las trayectorias ortogonales aparecen en aplicaciones de electricidad y magnetismo. Por ejemplo en el campo eléctrico que rodea a dos cuerpos de carga opuesta, las líneas de fuerza son perpendiculares a las curvas equipotenciales.

Un problema típico sobre trayectorias ortogonales consiste en lo siguiente: Dada la familia $G(x, y, c_1)$ hallar la familia $H(x, y, c_2)$ tal que $G(x, y, c_1)$ y $H(x, y, c_2)$ son trayectorias ortogonales.

Para hallar el modelo matemático que permite hallar la familia $H(x, y, c_2)$ nos damos cuenta de que la única hipótesis con que contamos es la ortogonalidad de las familias $G(x, y, c_1)$ y $H(x, y, c_2)$, este sería el paso 1 descrito anteriormente. Las variables que intervienen en este problema son x, y que representan las coordenadas que describen las curvas. Este problema no tiene parámetros (c_1 y c_2 son parámetros de las curvas, no parámetros del modelo), este es el paso 2. Finalmente, para el paso 3, procedemos como sigue:

i. Hallar las tangentes a la curva $G(x, y, c_1)$. Para hallar estas tangentes calculamos $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$, derivando implícitamente $G(x, y, c_1)$ en caso de ser necesario.

ii. Exigimos que las tangentes de la familia $H(x, y, c_2)$ sean perpendiculares a $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$. Esto se consigue poniendo $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{f(x, y)}$.

Por tanto, el modelo de este problema es:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)}.$$

Para ejemplificar lo descrito arriba nos permitimos presentar el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.1. *Hallar las familia de curvas ortogonales a la familia de hipérbolas $xy - c_1 = 0$.*

Solución. Despejamos la variable y de la expresión $xy - c_1 = 0$ y hallamos $\frac{dy}{dx}$. Estos cálculos nos dan como resultado $\frac{dy}{dx} = -\frac{c_1}{x^2}$. Luego, reemplazando el valor de c_1, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Por tanto, el modelo que describe la familia de curvas ortogonales a la familia de hipérbolas es $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$.

Para hallar la solución al problema matemático que deja planteado el modelo, procedemos de la siguiente manera: escribimos la última ecuación (el modelo matemático) en la forma $ydy = xdx$; integrando cada lado de esta igualdad se tiene $y^2 = x^2 + c_2$ donde c_2 es una constante. Luego la familia de curvas ortogonales a la famila de hipérbolas $xy - c_1 = 0$ es la familia de hipérbolas $y^2 - x^2 - c_2 = 0$.

El siguiente gráfico muestra algunas curvas de estas familias de curvas ortogonales.

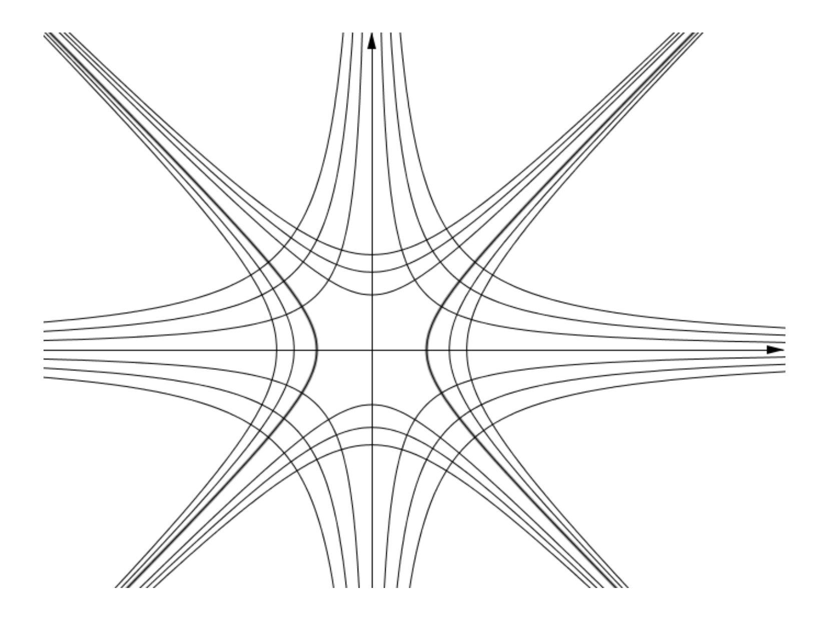


Figura 1.3: Familia $xy - c_1 = 0$ y sus curvas ortogonales

Determinación de edades

La desintegración radiactiva se entiende como la disminución (variación) con el paso del tiempo de la intensidad de la radiación de cualquier material radiactivo.

A partir de datos experimentales, se ha llegado a concluir que si N es la cantidad de un material radiactivo (intensidad de radiación), entonces la desintegración de N es proporcional a N; luego, el modelo que expresa esta disminución está dada por

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N,$$

donde el signo "$-$" indica disminución y λ es la constante de desintegración radiactiva.

El carbono 14 ($C14$) es un isótopo radiactivo del carbono que permite estimar la edad de fósiles y otras materias orgánicas a partir del modelo de desintegración radioactiva y del conocimiento que la semivida[1] de $C14$ es de 5600 años. Este método de determinación de edades ha contribuído grandemente al conocimiento que tenemos del tiempo pasado. Su empleo se ha generalizado habiendo alcanzado un alto grado de precisión en muestras de edad conocida, demostrando ser un excelente método de determinación cronológica.

Como ejemplo de la utilidad de este método de determinación de edades nos permitimos presentar el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.2. *Se encuentra que un hueso fosilizado contiene la centésima parte de la cantidad de $C14$ encontrada en la materia viva. Determine la edad del fósil.*

Solución. Sea $N(t)$ la cantidad de $C14$ presente en el hueso al tiempo t y N_0 la cantidad inicial de $C14$. Se tiene que el modelo matemático que describe la variación de la cantidad de $C14$ en el hueso es:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = -\lambda N \\ N(0) = N_0. \end{cases}$$

Desde la primera ecuación se tiene que $\dfrac{dN}{N} = -\lambda dt$. Luego, recordando que la semivida del $C14$ es 5600 años, tenemos que:

$$\int_{N_0}^{N_0/2} \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^{5600} dt.$$

[1]La semivida o edad media de un material radioactivo es el tiempo que tarda este material en desintegrarse a la mitad de su intensidad original

Realizando los cálculos (hacerlo) nos damos cuenta de que $\lambda = -\dfrac{\ln(1/2)}{5600}$.

Nuevamente, desde la primera ecuación, tenemos que:

$$\int_{N_0}^{N_0/100} \frac{dN}{N} = -\frac{\ln(1/2)}{5600} \int_0^t dt,$$

donde t es el tiempo en el cual la cantidad de $C14$ es una centésima parte de la cantidad original presente en el hueso. Haciendo cuentas se tiene que $t \approx -37206$ años.

Observamos que nuestros cálculos nos conducen a un tiempo negativo. Este resultado se debe interpretar de la siguiente manera: El valor "$t \approx -37206$" es el tiempo que debemos recorrer hacia atrás para determinar la edad del fósil. Por ejemplo, si t es el año 2000, entonces la edad del fósil sería aproximadamente de 35206 años.

Problemas de mezclas

El siguiente problema ha sido tomado de Ross [RS, pag. 109]. Se permite que una cierta sustancia S fluya con una cierta rapidez en un recipiente que contiene una mezcla, manteniéndose ésta uniforme por medio de un dispositivo que la agite. Además, esta mezcla uniforme fluye simultáneamente hacia el exterior del recipiente con otra rapidez (generalmente diferente). Determinar un modelo que nos permita calcular la cantidad de sustancia S presente en la mezcla en el instante t.

Las condiciones del problema ya nos indican cuales son las suposiciones que vamos a tomar en cuenta en la construcción de nuestro modelo. Si x representa la cantidad de S presente en el instante t, entonces la derivada $\dfrac{dx}{dt}$ mide la rapidez de variación de x con respecto a t. Si denotamos "ent" la razón a la que S entra en la mezcla y por "sal" la razón a la que sale, entonces el modelo que expresa esta situación es

$$\frac{dx}{dt} = \text{ent} - \text{sal}\,.$$

Para tener una idea más clara de la aplicación de estos modelos matemáticos presentamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.3. *La corriente sanguínea lleva un medicamento hacia el interior de un órgano a razón de* 3 cm^3/seg*, y sale de él con el mismo caudal. El órgano tiene un volumen líquido de* 125 cm^3*. Si la concentración del medicamento en la sangre que entra en el órgano es de* 0.2 gr/cm^3*:*

a. ¿Cuál es la concentración del medicamento en el órgano en el instante t *si inicialmente no había vestigio alguno del medicamento?*

b. ¿Cuándo la concentración del medicamento en el órgano será de 0.1 gr/cm^3*?*

Solución. Sea $M(t)$ la cantidad de medicamento en el órgano al segundo t. Puesto que el órgano tiene un volumen líquido de 125 cm^3, tenemos que la concentración de medicamento que sale del órgano es igual a $\frac{M}{125} gr/cm^3$.

Utilizando el modelo matemático para la cantidad de una sustancia en un recipiente se tiene que (ver figura 1.4 para una representación gráfica de este ejemplo):

$$\begin{cases} \dfrac{dM}{dt} = 0.6 - \dfrac{3M}{125}, \\ M(0) = 0. \end{cases}$$

Desde la primera ecuación se tiene que $\frac{dM}{75 - 3M} = \frac{dt}{125}$. Integrando a cada lado y realizando los cálculos necesarios se tiene que la cantidad de medicamento en el órgano al segunto t está dada por la expresión:

$$M(t) = 25 \left(1 - e^{-\frac{3t}{125}}\right).$$

Observamos que las integrales se han tomado desde 0 hasta $M(t)$ y desde 0 hasta t respectivamente.

Finalmente, si escribimos $\mathrm{Con}(t)$ por la concentración del medicamento al segundo t tenemos que $\mathrm{Con}(t) = \frac{M(t)}{125}$. Es decir:

$$\mathrm{Con}(t) = \frac{1 - e^{-\frac{3t}{125}}}{5}.$$

Para responder al literal b del ejemplo tenemos que resolver la ecuación

$$\frac{1 - e^{-\frac{3t}{125}}}{5} = 0.1.$$

Realizando los cálculos respectivos tenemos que $t \approx 29seg$.

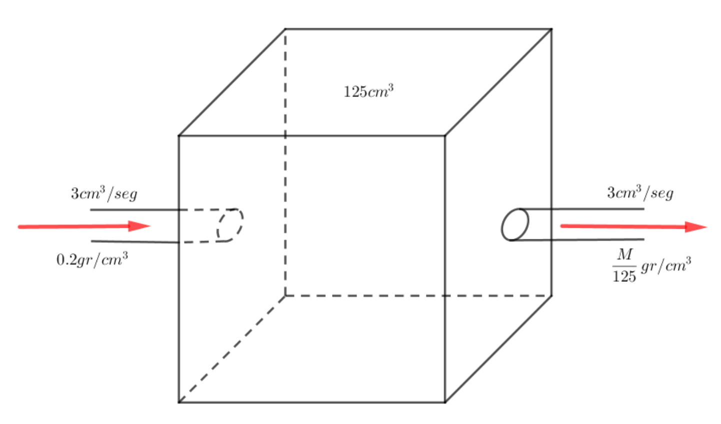


Figura 1.4: Representación de la entrada-salida de un medicamento en un órgano.

Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton

Si un cuerpo, cuya temperatura es T, se encuentra rodeado o en los alrededores de otro cuerpo, cuya temperatura es T_M, termina alcanzando una temperatura igual a T_M sea por perdida de temperatura (cuando $T_M < T$) o por aumento de ésta (cuando $T_M > T$).

Si denotamos por T_M a la temperatura del medio, entonces, de acuerdo con la ley empírica de Equilibrio Térmico de Newton, la rapidez con la que cambia la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio que lo rodea. Si además suponemos que la temperatura del cuerpo es T_0 cuando $t = t_0$, entonces el modelo matemático que expresa esta situación es:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(T - T_M) \\ T(t_0) = T_0, \end{cases}$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

A continuación presentamos un ejemplo que muestra una posible aplicación de este modelo matemático.

Ejemplo 1.4. *Justamente antes del mediodía, el cuerpo de una víctima de homicidio es hallada en un cuarto que se conserva a temperatura constante e igual a $21\,°C$. A*

mediodía, la temperatura del cuerpo es de $26\,°C$ y a la una de la tarde, es de $24\,°C$. Considere que la temperatura del cuerpo en el momento de la muerte era de $37\,°C$ y que el cuerpo se ha enfriado de acuerdo con la Ley de Equilibrio Térmico de Newton. ¿Cuál fue la hora de la muerte?

Solución. Fijemos el mediodía como la hora cero para nuestros cálculos. Si t_0 denota la hora de fallecimiento, entonces el problema pide hallat el valor de t_0 tal que se satisfaga el siguiente problema:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(T-21) \\ T(t_0) = 37. \end{cases}$$

Desde la primera ecuación, con los datos proporcionados por el problema, se tiene

$$\int_{26}^{24} \frac{dT}{T-21} = k\int_0^1 dt.$$

De la última igualdad se tiene que (realizar los cálculos) $k = \ln\left(\dfrac{3}{5}\right)$.

Nuevamente, desde la primera ecuación tenemos

$$\int_{26}^{37} \frac{dT}{T-21} = \ln\left(\frac{3}{5}\right)\int_0^{t_0} dt.$$

Calculando la integral vemos que $t_0 = \dfrac{\ln\left(\frac{16}{5}\right)}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)} \approx -2$. Luego, la hora de muerte es aproximadamente las 10 de la mañana.

Proliferación de enfermedades

Una enfermedad contagiosa, por ejemplo, la gripe, se propaga a través de una comunidad por personas que han estado en contacto con otras personas enfermas. Denotemos por $x(t)$ el número de personas que han contraído la enfermedad y por $y(t)$ el número de personas que aún no han sido expuestas al contagio. Si se supone que la razón con la que se propaga la enfermedad es proporcional al número de interacciones entre estos dos grupos de personas, entonces la ecuación que describe esta situación es

$$\frac{dx}{dt} = kxy,$$

donde k es una constante de proporcionalidad que se la puede llamar "constante de propagación de la enfermedad". Si además suponemos que, en una comunidad de N personas se introduce un número de N_0 enfermos, entonces podemos argumentar que x, y están relacionadas por la ecuación $x + y = N + N_0$. Luego $y = N + N_0 - x$. Finalmente, el modelo matemático para describir la propagación de una enfermedad es el siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = kx(N + N_0 - x) \\ x(t_0) = N_0. \end{cases}$$

Observación 1.2. *El modelo matemático presentado para la propagación de enfermedades no toma en cuenta las migraciones. Un modelo que tome en cuenta este hecho es mucho más complicado (al menos es lo que se espera) que el presentado en este texto.*

El siguiente ejemplo es una modificación del problema 7 de Zill [ZD, pag. 28]. Este muestra una aplicación elemental del modelo de propagación de enfermedades expuesto más arriba:

Ejemplo 1.5. *Suponga que un alumno es portador del virus de la gripe y regresa al apartado campus de su universidad de* 1000 *estudiantes. Si al tercer día el número de enfermos es de cinco estudiantes, halle una expresión para el número de estudiantes* $x(t)$ *que contraerán la gripe si la razón con la que la enfermedad se propaga es proporcional al número de interacciones entre el número de estudiantes que tienen gripe y el número de estudiantes que aún no se han expuesto a ella.*

Solución. Para este problema, consideramos que $N = 999$, el número de estudiantes en el campus antes de reintegrarse el estudiante enfermo, $N_0 = 1$. Podemos suponer que $t_0 = 0$. Luego el modelo matemático que expresa esta situación es:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = kx(1000 - x) \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Desde la primera ecuación y desde la información proporcionada por el problema tenemos

$$\int_1^5 \frac{dx}{x(1000 - x)} = k \int_0^3 dt,$$

realizando los cáclulos (hacerlos) se tiene que

$$k = \frac{1}{3000} \ln\left(\frac{999}{199}\right).$$

Nuevamente, desde la primera ecuación (realizar los cálculos), tenemos que la expresión para la número de estudiantes que contraerán la gripe está dada por:

$$x(t) = \frac{1000e^{\sqrt[3]{\ln\left(\frac{999}{199}\right)t}}}{999 - e^{\sqrt[3]{\ln\left(\frac{999}{199}\right)t}}}.$$

Modelos matemáticos generados por problemas diversos

A continuación se presentan algunos problemas que ilustran la construcción de un modelo matemático a partir de situaciones físicas que se presentan en determinados problemas de carácter físico y/o técnico.

Problema 1.1. *Hallar un modelo matemático que describa la variación del nivel de agua en el tiempo, en un tanque cilíndrico de almacenamiento de agua que tiene un diámetro D y una altura inicial de agua h_0, a partir del momento en que se abre la tubería de desfogue inferior con un diámetro d.*

Solución. La figura 1.5 muestra gráficamente las condiciones del problema 1.1.

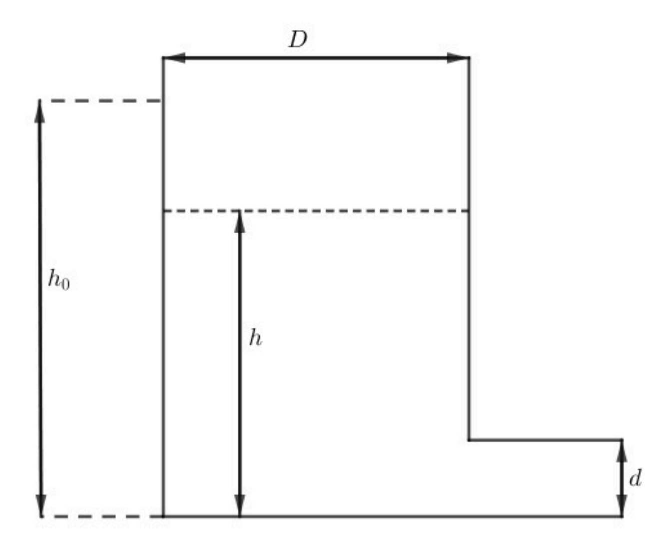


Figura 1.5: Representación de un tanque cilíndrico de almacenamiento de agua

Para hallar el modelo matemático tomamos en cuenta lo siguiente:

1. Por un lado, el caudal de salida de agua es igual a la velocidad de salida de agua multiplicada por el área de la sección transversal. Sea v la velocidad de salida de agua. Por el Teorema de Torricelli se tiene que $v = \sqrt{2gh}$. Además, el área de la sección transversal es igual a $\frac{d^2\pi}{4}$. Denotemos con q_s el caudal de salida del agua. Así, tenemos que $q_s = \frac{d^2\pi}{4}\sqrt{2gh}$.

   Por otro lado, se define $q_s = \frac{dV}{dt}$, donde V es el volumen de agua en el cilindro. Igualando las dos expresiones para q_s tenemos $\frac{dV}{dt} = \frac{d^2\pi}{4}\sqrt{2gh}$. Luego

$$dV = \frac{d^2\pi}{4}\sqrt{2gh}dt. \tag{1.1}$$

2. El diferencial de volumen de agua en el tanque cilíndrico es igual al área de la sección transversal multiplicada por un diferencial de altura. Sea h la altura de agua en el tanque, luego se tiene que

$$dV = -\frac{D^2\pi}{4}dh, \tag{1.2}$$

   donde el signo "$-$" indica que el volumen va disminuyendo.

Igualando las ecuaciones 1.1 y 1.2 se tiene $\frac{d^2\pi}{4}\sqrt{2gh}dt = -\frac{D^2\pi}{4}dh$. Eliminando términos semejantes, la última ecuación se puede escribir como

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{d^2}{D^2}\sqrt{2gh}.$$

Si pedimos que $h(t_0) = h_0$, entonces el modelo matemático que describe la variación del nivel de agua en el tiempo, en un tanque cilíndrico de almacenamiento de agua que tiene un diámetro D y una altura inicial de agua h_0, a partir del momento en que se abre la tubería de desfogue inferior con un diámetro d está dado por

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = -\frac{d^2}{D^2}\sqrt{2gh} \\ h(t_0) = h_0. \end{cases}$$

Problema 1.2. *Se denomina curva de persecución a la curva que describe un objeto que se desplaza a velocidad constante w, y que persigue de manera óptima a otro que se desplaza en línea recta a una velocidad v también constante.*

Hallar un modelo matemático que describa una curva de persecución.

Solución. Sea A el objeto que describe la curva de persecución (la curva en rojo de la figura 1.6) y sea B el objeto que es perseguido por el objeto A. Además, suponemos que la distancia entre A y B es c.

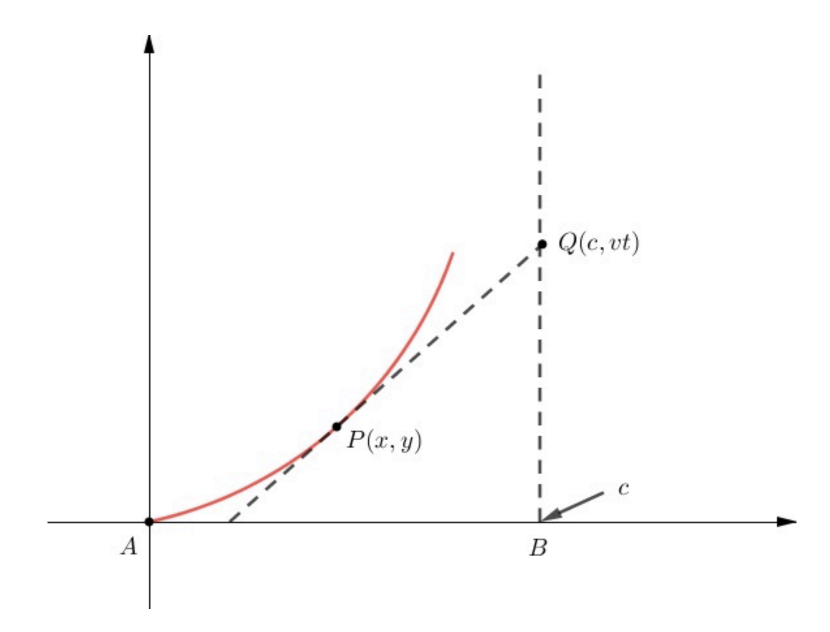


Figura 1.6: Representación de una curva de persecución

En el instante en el que el objeto B se encuentra en la posición Q, el objeto A se encuentra en la posición P. Luego, por la definición de curva de persecución, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{vt - y}{c - x}. \tag{1.3}$$

Desde la física elemental se conoce que la rapidez se define como la variación del arco de la curva descrita por un objeto respecto al tiempo.

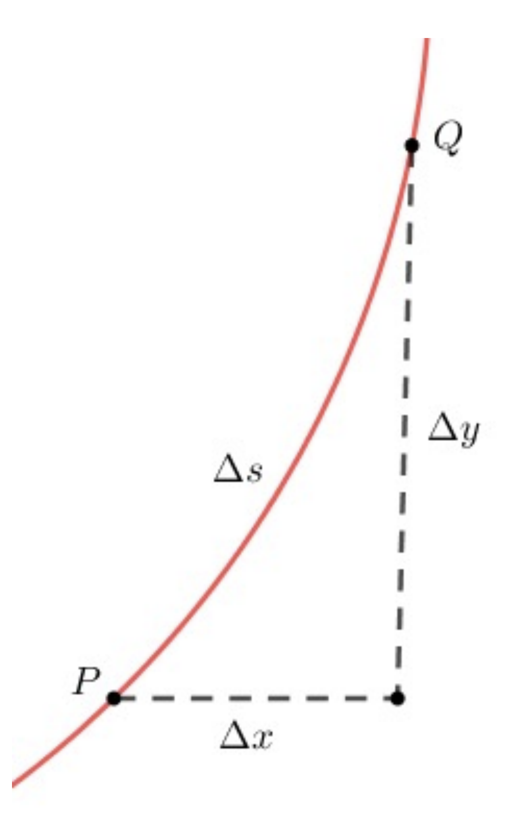


Figura 1.7: Aproximación de la rapidez de un objeto

Desde la figura 1.7 se puede ver que

$$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$
$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x.$$

Dividiendo cada termino por Δt se tiene que $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} \approx \sqrt{1 + \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$. Tomando límite cuando $\Delta t \to 0$ se tiene

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + (y')^2}\,\frac{dx}{dt}. \tag{1.4}$$

Observación 1.3. *Dejamos como ejercicio para el lector la justificación del hecho que* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to \dfrac{dy}{dx}$ *cuando* $\Delta t \to 0$.

En la Ecuación 1.3 ponemos $p = \dfrac{dy}{dx}$ y despejamos la variable t. Realizando cuentas se tiene

$$t = \frac{y + p(c - x)}{v}.$$

Ahora derivamos t respecto a x:

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dx} &= \frac{1}{v}\left(\frac{dy}{dx} + p(-1) + (c-x)\frac{dp}{dx}\right)\\ &= \frac{1}{v}\left(p - p + (c-x)\frac{dp}{dx}\right)\\ &= \frac{c-x}{v}\frac{dp}{dx}.\end{aligned}$$

En la ecuación 1.4 ponemos $b = \dfrac{ds}{dt}$ y despejamos el valor de $\dfrac{dt}{dx}$. Realizando cuentas (hacerlo) se tiene $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{\sqrt{1-p^2}}{b}$. Igualando las dos últimas expresiones, tenemos

$$\frac{c-x}{v}\frac{dp}{dx} = \frac{\sqrt{1-p^2}}{b}.$$

Finalmente, suponiendo que $p(0) = 0$, el modelo matemático para describir una curva de persecución esta dado por:

$$\begin{cases}\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{v}{b}\dfrac{\sqrt{1-p^2}}{c-x},\\ p(0) = 0.\end{cases}$$

Problema 1.3. *Considere dos tanques A y B conectados entre sí. Suponga que el tanque A tiene un volumen V_A de agua en el que se han disuelto L_A libras de sal. Suponga que el tanque B tiene un volumen V_B de agua pura. Un mecanismo bombea agua pura hacia dentro del tanque A y salmuera hacia afuera del tanque B, existe un intercambio de líquido entre los tanques. Construir un modelo matemático que describa la cantidad de libras $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de sal en los tanques A y B, respectivamente, en el tiempo t.*

Solución. La figura 1.8 muestra las condiciones impuestas al problema 1.3.

Con un análisis similar al que se realizo en el ejemplo 1.3 (ver p. 15) vemos que la razón de cambio de sal en el tanque A esta dado por:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \overbrace{C_A \cdot 0 + C_{BA}\cdot\frac{x_2}{V_B}}^{\text{razón de entrada de la sal}} - \overbrace{C_{AB}\cdot\frac{x_1}{V_A}}^{\text{razón de salida de la sal}}\\ &= -\frac{C_{AB}}{V_A}x_1 + \frac{C_{BA}}{V_B}x_2.\end{aligned} \tag{1.5}$$

De manera similar, para el tanque B, la razón de cambio de sal es

$$\begin{aligned}\frac{dx_2}{dt} &= C_{AB}\cdot\frac{x_1}{V_A} - C_{BA}\cdot\frac{x_2}{V_B} - C_B\cdot\frac{x_2}{V_B}\\ &= \frac{C_{BA}}{V_A}x_1 - \left(\frac{C_{BA}+C_B}{V_B}\right)x_2.\end{aligned} \tag{1.6}$$

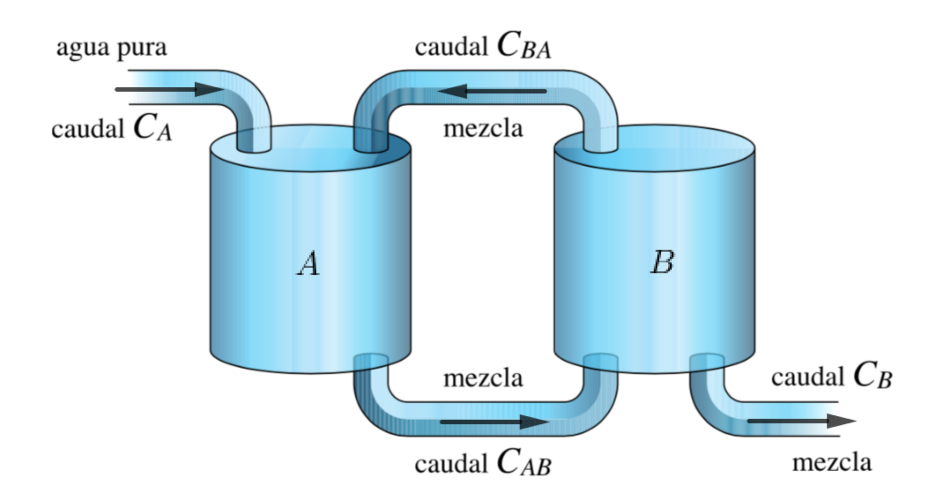


Figura 1.8: Tanques de mezclado conectados

Tomando en cuenta que $x_1(0) = L_A$ y $x_2(0) = 0$, el modelo matemático que describe la cantidad de libras $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de sal en los tanques A y B está dado por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt} = -\dfrac{C_{AB}}{V_A}x_1 + \dfrac{C_{BA}}{V_B}x_2\\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{C_{BA}}{V_A}x_1 - \left(\dfrac{C_{BA}+C_B}{V_B}\right)x_2\\ x_1(0) = L_A\\ x_2(t) = 0.\end{cases}$$

Problema 1.4. *El aprendizaje es un proceso extremadamente complejo. Sin embargo, es posible construir modelos matemáticos de ciertos tipos de memorización. Por ejemplo, considere una persona a quien se le da una lista para estudiar y posteriormente se le hacen pruebas periódicas para determinar exactamente qué tanto de la lista ha memorizado. Sea $L(t)$ la fracción aprendida de la lista en el tiempo t,*

donde $L = 0$ corresponde a no saber nada del listado y $L = 1$ corresponde a saber todo el listado. Evidencia experimental muestra que la variación de L es proporcional a la fracción que queda por aprender.

1. *Hallar un modelo matemático para describir $L(t)$.*

2. *¿Para qué valor de L ocurre más rápidamente el aprendizaje?*

Solución. Puesto que la fracción aprendida de la lista en el tiempo t es proporcional a la fraccional que queda por aprender y $L = 1$ corresponde a saber todo el listado, se tiene que

$$\frac{dL}{dt} = k(1 - L),$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Si además suponemos que $L(0) = 0$, entonces el modelo matemático que describe la fracción aprendida de una lista está dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = k(1 - L) \\ L(0) = 0. \end{cases}$$

Para responde al segundo literal partimos de la ecuación $\dfrac{dL}{dt} = k(1 - L)$. En efecto, a partir de esta igualdad se tiene que $\dfrac{dL}{1 - L} = kdt$, luego $\displaystyle\int_0^L \frac{dL}{1 - L} = k \int_0^t dt$. Realizando los cálculos (hacerlo) se tiene que

$$L(t) = 1 - e^{-kt}. \tag{1.7}$$

Un análisis cuantitativo de la ecuación 1.7 nos indica que el aprendizaje ocurre más rápidamente cuando $L = 0$. La figura 1.9 muestra la curva $L(t)$ para algunos valores de la constante k.

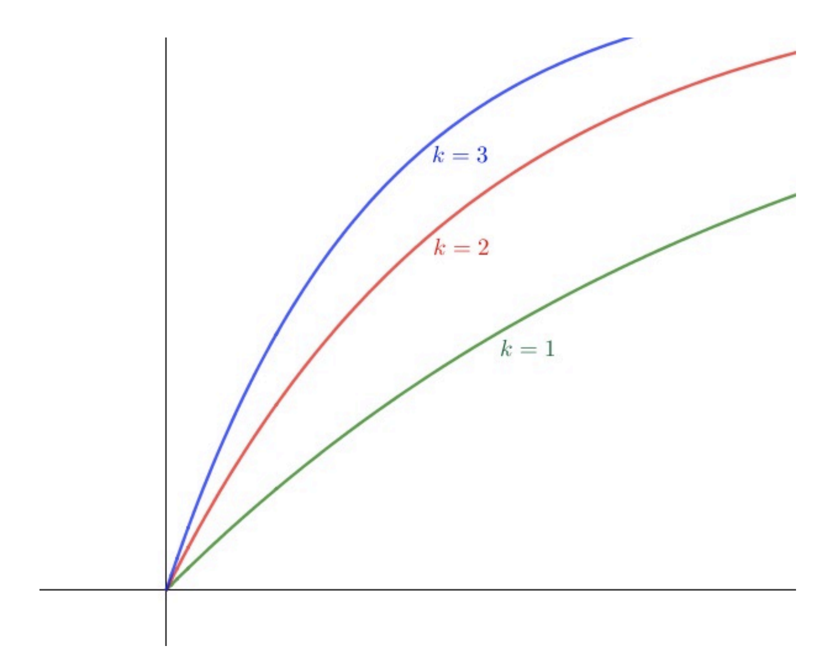


Figura 1.9: Gráfico de la función $L(t)$ para algunos valores de k

Observación 1.4. *El lector puede trazar algunas curvas $L(t)$ para valores negativos de k y darse cuenta que $L(t)$ tiene sentido únicamente para valores positivos de k.*

Problema 1.5. *Hallar una curva que pase por el punto $(0, -6)$, de tal forma que la pendiente de la tangente en cualquiera de sus puntos sea igual a la ordenada del punto más siete unidades.*

Solución. Sea $y(x)$ la curva. Puesto que la pendiente de la tangente en cualquier punto es igual a $\dfrac{dy}{dx}$, el modelo matemático que hallará la curva solicitada es

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + 7 \\ y(0)) - 6. \end{cases}$$

Para hallar explicitamente $y(x)$ resolvamos el problema matemático planteado por el modelo matemático. Es decir, hallamos $y(x)$ a partir de la ecuación $\dfrac{dy}{dx} = y + 7$. Se tiene que $\dfrac{dy}{y+7} = dx$. Luego, integrando a cada lado, $\ln(y + 7) = x + k$, donde k es una constante de integración. Para hallar el valor de la constante k utilizamos la condición $y = -6$ cuando $x = 0$. Haciendo cuentas, se tiene que $k = 0$, luego $\ln(y + 7) = x$. Despejando la variable y de la última expresión tenemos que la curva está dada por la ecuación $y(x) = e^x - 7$.

Para más ejemplos de modelos y los problemas matemáticos que generan estos, se recomienda consultar la bibliografía.

Ejercicios

El siguiente bloque de ejercicios ha sido tomado de Becerril y Elizarraz [BE].

1. Encontrar las trayectorias ortogonales de la familia de parábolas $y = cx^2$.

2. Determine el miembro de la familia de trayectorias ortogonales de $3xy^2 = 2+3cx$, que pasa por el punto $(0, 4)$.

3. En 1950 se hicieron excavaciones en Nipur (Babilonia), en las cuales se encontraron muestras de carbón que reportaron 4.09 desintegraciones por minuto y por gramo. Una muestra actual reportó 6.68 desintegraciones por minuto y por gramo. Se sabe que la primer muestra se formó en la época del reinado de Hammurabi. Con estos datos, determine hace cuanto tiempo Hammurabi reinó en Babilonia.

4. Un cuerpo a una temperatura desconocida se pone en un refrigerador a una temperatura constante de $1\,°F$. Si después de 20 minutos la temperatura del cuerpo es de $40\,°F$ y después de 40 minutos la temperatura del cuerpo es de $20\,°F$, hallar la temperatura inicial de este.

5. En un cultivo de bacterias, se tenían x número de familias. Después de una hora, se observaron en el cultivo 1000 familias de la bacteria y después de cuatro horas, cuatro familias. Encontrar la expresión para el número de familias de la bacteria presentes en el cultivo al tiempo t y el número de familias de la bacteria que había originalmente en el cultivo.

6. Un tanque contiene inicialmente 60 galones de agua pura. Entra al tanque, a una tasa de 2 gal/min, salmuera que contiene 1 libra de sal por galón, y la solución (perfectamente mezclada) sale de él a razón de 3 gal/min. Obtenga el número de libras $A(t)$ de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera.

¿Cuánto demorará el tanque en vaciarse? ¿Cuál es la máxima cantidad de sal que llega a tener el tanque?

1.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden separables

En esta sección estudiamos el primer y quizá más sencillo tipo de ecuación diferencial. Notamos además que el método usado para hallar la solución de estas ecuaciones también fundamenta la forma en que resolvimos algunos de los problemas matemáticos planteados por los modelos de la sección 1.1.

Comenzamos definiendo qué se entiende por *ecuación diferencial* y dando algunos conceptos relacionados con las ecuaciones diferenciales.

Definición 1.2. *Se llama* ***ecuación diferencial*** *a cualquier ecuación en la cual aparezcan las derivadas de una o más variables independientes, las incógnitas de la ecuación, respecto a una o más variables dependientes*[2].

Son ejemplos de ecuaciones diferenciales las siguientes:

1. $\dfrac{dy}{dx} + 5xy = \operatorname{sen} x.$
2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} + 7x = xy.$
3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$
4. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = ux.$

Sobre el conjunto de todas las ecuaciones diferenciales se puede hacer una primera clasificación de acuerdo a la naturaleza de las derivadas que aparecen en la ecuación.

Definición 1.3. *Una ecuación diferencial se llama ecuación diferencial ordinaria (EDO) si en ella aparecen únicamente derivadas ordinarias. Si en la ecuación aparecen*

[2] En esta definición de ecuación diferencial están excluidas ecuaciones de la forma $\dfrac{d(uv)}{dx} = v\dfrac{du}{dx} + u\dfrac{dv}{dx}$, $(e^x)' = e^x$, etc. que son identidades.

derivadas parciales la ecuación se dice que es una ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP).

En los ejemplos anteriores, las ecuaciones 1 y 2 son EDO mientras las ecuaciones 3 y 4 son EDP.

Una segunda clasificación sobre el conjunto de ecuaciones diferenciales está dada por el orden de la derivada de más alto orden que aparece en la ecuación.

Definición 1.4. *Se llama orden de una ecuación diferencial al orden más alto de la derivada que aparece en la ecuación.*

Las ecuaciones de los ejemplos 1 y 4 son ecuaciones de primer orden mientras que las ecuaciones 2 y 3 son de segundo orden.

Una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden se puede escribir de la forma:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{1.8}$$

La noción de solución de una ecuación diferencial es, claramente, la misma que se tiene para una solución de cualquier ecuación. La definición exacta de solución de una ecuación diferencial ordinaria es la siguiente:

Definición 1.5. *Se llama solución explícita de la ecuación 1.8 en un intervalo I a cualquier función f definida en I, que admite hasta la n-ésima derivada para todo x de I y tal que $F\left(x, f, \frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \ldots, \frac{d^nf}{dx^n}\right)$ es idénticamente nulo para cada $x \in I$.*

Por ejemplo, la función f definida para todo real x por $f(x) = 2\operatorname{sen} x + 3\cos x$ es una solución explícita de la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ en todos los reales. En efecto, para comprobar que f es una solución de la ecuación diferencial tenemos que calcular la segunda derivada y reemplazar este valor en la ecuación diferencial.

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= 2\cos x - 3\operatorname{sen} x. \\ \frac{d^2f}{dx^2} &= -2\operatorname{sen} x - 3\cos x. \end{aligned}$$

Reemplazando se tiene

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + f = -2\operatorname{sen} x - 3\cos x + 2\operatorname{sen} x + 3\cos x,$$

que es idénticamente igual a cero en todos los reales

Observación 1.5. *En la mayoría de los casos, lo más que se puede esperar al aplicar algún método de resolución de una ecuación diferencial es hallar una relación $g(x, y, c) = 0$ que satisfaga la ecuación diferencial. Una relación de este tipo, es decir, una relación que satisfaga la ecuación diferencial, se llama solución implícita si, a partir de esta, se puede definir una solución explícita en un intervalo I.*

Por ejemplo, la relación $x^2 + y^2 - 25 = 0$ satisface la ecuación diferencial $x + y\dfrac{dy}{dx} = 0$ (comprobarlo). Además, esta relación define la función $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ que es una solución explícita en el intervalo $I = [-5, 5]$ (comprobarlo). Luego la relación $x^2 + y^2 - 25 = 0$ es una solución implícita.

Observación 1.6. *Una relación $g(x, y, c) = 0$ que satisfaga una ecuación diferencial pero que, a partir de esta, no sea posible hallar una solución explícita de la ecuación diferencial en algún intervalo I, se llama solución formal de la ecuación. Por ejemplo, la relación $x^2 + y^2 + 25 = 0$ es una relación que satisface la ecuación $x + y\dfrac{dy}{dx} = 0$, pero claramente se ve que esta relación no define ninguna función que sea solución explícita de la ecuación. Luego, la relación $x^2 + y^2 + 25 = 0$ es una solución formal.*

De ahora en adelante, a menos que se indique lo contrario, solo diremos solución de la ecuación diferencial sin indicar si se está tratando con una solución explícita o implícita.

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es aquella ecuación diferencial que tiene o se puede reducir a la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{1.9}$$

Proposición 1.1. *Toda ecuación diferencial de primer orden se puede escribir de la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.*

Demostración. Ya que una ecuación de primer orden tiene la forma 1.9, ponemos $M(x,y) = f(x,y)$ y $N(x,y) = -1$. □

Una ecuación diferencial de primer orden escrita como $M(x,y)dx+N(x,y)dy = 0$ se dice que está escrita en forma diferencial. La forma diferencial de una ecuación de primer orden es importante porque a partir de ésta se puede decidir con que tipo de ecuación diferencial se está tratando.

A continuación pedimos hallar la forma diferencial de una ecuación diferencial particular.

Ejemplo 1.6. *Hallar la forma diferencial de la ecuación* $y' - \dfrac{x^2}{\operatorname{sen}(x-y)} = 0$

Solución. Escribimos la ecuación como $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{\operatorname{sen}(x-y)}$. Luego, multiplicando y trasponiendo términos, tenemos que la forma diferencial de la ecuación es

$$x^2dx - \operatorname{sen}(x-y)dy = 0.$$

Sea $g(x,y,c) = 0$ la solución de la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. La relación $g(x,y,c) = 0$ define una familia uniparamétrica de curvas llamada curvas integrales de la ecuación diferencial. Por ejemplo, las curvas integrales de la ecuación diferencial $x + y\dfrac{dy}{dx} = 0$ es la familia uniparamétrica de curvas $x^2 + y^2 - c = 0$ donde $c > 0$.

En el siguiente gráfico, se pueden apreciar algunas de estas curvas integrales.

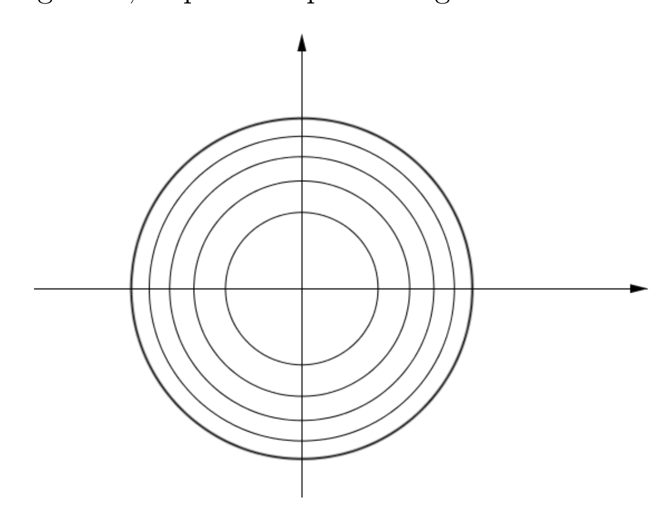


Figura 1.10: Curvas integrales de la ecuación $x + y\dfrac{dy}{dx} = 0$

En muchos problemas es común que aparezca una condición adicional que debe satisfacer la solución de la ecuación diferencial. Por ejemplo, se puede pedir hallar la solución de la ecuación $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ de tal forma que la solución, digamos $y(x)$, satisfaga la siguiente condición: $y = y_0$ cuando $x = x_0$. Este tipo de problemas se les conoce como problemas con condiciones iniciales cuando $x_0 = 0$ y problemas con condiciones en la frontera en caso contrario.

La forma habitual de escribir este tipo de problemas es como sigue:

Resolver el problema:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

El sentido geométrico de un problema con condiciones iniciales (con condiciones en la frontera) consiste en elegir del conjunto de curvas integrales justo aquella que satisface la condicón adicional.

El siguiente gráfico muestra algunas curvas integrales y cuál es la curva que está eligiendo la condición $y(x_0) = y_0$.

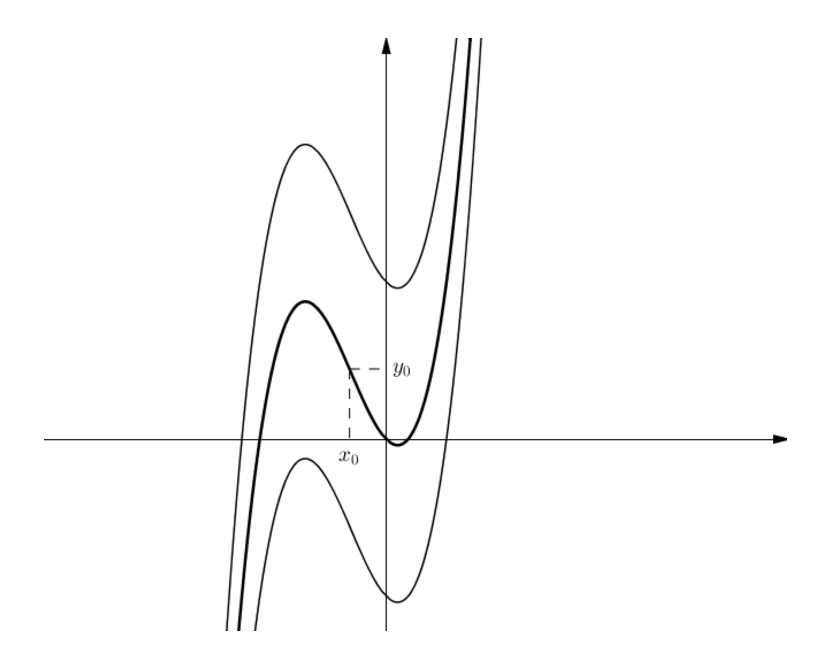


Figura 1.11: Solución al problema $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$

La noción de problema con condiciones iniciales y problema con condiciones en

la frontera se puede extender fácilmente a ecuaciones diferenciales de n-ésimo orden de la siguiente manera:

Resolver:

$$\begin{cases} F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_1) = y_1, \\ y''(x_2) = y_2, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_{n-1}) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Cuando $x_0 = x_1 = \ldots = x_{n-1}$, el problema se llama problema con condiciones iniciales, en caso contrario, se llama problema con condiciones en la frontera.

Observación 1.7. *Cuando resolvemos un problema con condiciones iniciales (o con condiciones en la frontera), es importante de que estemos seguros que tal solución existe, sino podríamos pasar toda la vida buscando una solución que podría no existir.*

El siguiente teorema, cuya demostración cae fuera del alcance de este texto, da una condición suficiente para la existencia y unicidad de soluciones de una ecuación diferencial de primer orden con una condición adicional del tipo $y(x_0) = y_0$.

Sea $\mathcal{R} = (a, b) \times (c, d)$ un rectángulo del plano xy, $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$.

Teorema 1.1. *Si la función definida por $f(x, y)$ y su derivada parcial especto a y son ambas funciones continuas en $\mathcal{R}$, entonces el problema*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

tiene solución única.

Ahora retomamos nuestro estudio de las ecuaciones diferenciales de primer orden. Recordamos que la proposición 1.1 nos dice que toda ecuación diferencial de primer orden se puede escribir de la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

Definición 1.6 (Ecuación separable)**.** *La ecuación diferencial de primer orden* $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ *se llama ecuación diferencial en variables separables o simplemente ecuación separable si* $M(x,y) = f_1(x)g_2(y)$ *y* $N(x,y) = f_2(x)g_1(y)$*.*

Notamos que, si $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es una ecuación separable, entonces se la puede escribir como

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = 0. \tag{1.10}$$

La solución de una ecuación separable se obtiene integrando, es decir, la solución de una ecuación separable es

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = c.$$

Ejemplo 1.7. *Resolver la siguiente ecuación diferencial* $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0.$

Solución. Primero escribimos la ecuación en su forma diferencial. Realizando operaciones, vemos que esta ecuación la podemos escribir como

$$(x^2 - yx^2)dx + (y^2 + xy^2)dy = 0,$$

por tanto $M(x,y) = x^2 - yx^2 = x^2(1-y)$ y $N(x,y) = y^2 + xy^2 = y^2(1+x)$. Dividiendo toda la ecuación para $(1-y)(1+x)$ la ecuación queda de la forma

$$\frac{x^2}{1+x}dx + \frac{y^2}{1-y}dy = 0.$$

Luego, la solución es $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x}dx + \int \frac{y^2}{1-y}dy = c$. Integrando, se tiene que la solución de la ecuación diferencial es

$$\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) - \frac{y^2}{2} - y - \ln(1-y) = c.$$

Ejemplo 1.8. *Resolver el siguiente problema con condiciones iniciales:*

$$\begin{cases} x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Solución. Primero resolvemos la ecuación $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$. Separando variables e integrando se tiene que

$$\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} = c \tag{1.11}$$

es la solución de la ecuación. La condición $y(0) = 1$ nos permite hallar el valor de la constante c. Como la condición inicial nos dice que $x = 0$, $y = 1$, reemplazamos estos valores en la ecuacún 1.11 y resulta que $c = 1$. Luego, la solución del problema con condiciones iniciales es $\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} = 1$.

El siguiente ejemplo muestra una ecuación diferencial que no es separable pero, con un cambio de variable adecuado, se la transforma en una ecuación diferencial separable.

Ejemplo 1.9. *Probar que la ecuación* $(x+y)dx - \left(\frac{x^2}{y}\right)dy = 0$ *se puede transformar en una ecuación diferencial separable.*

Solución. Afirmamos que la sustitución $x = uy$ transforma la ecuación diferencial $(x+y)dx - \left(\frac{x^2}{y}\right)dy = 0$ en un acuación diferencial separable. En efecto, tenemos que $dx = ydu + udy$. Reemplazando estos valores en la ecuación diferencial tenemos

$$(uy+y)(ydu+udy) - \left(\frac{u^2y^2}{y}\right)dy = 0.$$

Multiplicando y agrupando términos tenemos (se pide al lector que realice las cuentas) $y^2(u+1)du + uydy = 0$. La última ecuación es claramente una ecuación diferencial en variables separables.

El ejemplo 1.9 muestra que existen ecuaciones diferenciales que son susceptibles de transformarlas en ecuaciones separables. La siguiente sección estudia casos particulares de estas ecuaciones.

Ejercicios

El siguiente bloque de ejercicios ha sido tomado de Boyce y DiPrima [BD].

1. Demostar que la ecuación $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{1-y^2}$.

2. Resolver el problema con valor inicial $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2+4x+2}{2(y-1)} \\ y(0) = -1 \end{cases}$

3. Encontrar una solución al problema con valor inicial $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\cos x}{1+2y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

4. $y' = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)$.
5. $xy' = (1-y^2)^{1/2}$-
6. $y' = \dfrac{x - e^{-x}}{y + y^y}$.
7. $\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{r^2}{\theta}$.
8. $\operatorname{sen} 2x\, dx + \cos 3y\, dy = 0$.
9. $y^2(1-x^2)^{1/2}dy = \arccos x\, dx$.

1.3 Ecuaciones diferenciales ordinarias que se pueden reducir a ecuaciones separables

En esta sección, estudiamos algunos tipos de ecuaciones que se pueden reducir a ecuaciones separables a través de sustituciones.

Las ecuaciones diferenciales de primer orden homogéneas (ver definición 1.8) son una clase típica de ecuaciones diferenciales que pueden reducirse a ecuaciones separables. Antes de dar la definición de ecuación diferencial homogénea tenemos que dar la siguiente definición.

Definición 1.7. *Sea f una función de m variables. Se dice que f es una función homogénea de grado n si para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ su cumple que*

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_m) = \lambda^n f(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

En el caso particular de una función de dos variables x, y se tiene que f es una función homogénea de grado n si para todo número real λ se cumple que

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Son ejemplos de funciones homogéneas las funciones definidas como:

1. $f(x, y) = x^2 + xy$.
2. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + 3x - 2y$.
3. $f(x, y) = x^3 \cos\left(\dfrac{x}{y}\right) - x^2 y e^{\frac{y}{x}}$.
4. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + 3xy}{5y^2 + x^2}$.

La función del ejemplo 1 es una función homogénea de grado 2, las funciones de los ejemplos 2, 3 y 4 son funciones homogéneas de grado 1, 3 y 0 respectivamente. Un ejemplo de función que no es homogénea es la función definida por $f(x, y) = x^2+2x-y$.

Ahora ya podemos definir el concepto de ecuación diferencial homogénea.

Definición 1.8. *La ecuación diferencial $M(x, y)dx+N(x, y)dy = 0$ se llama ecuación diferencial homogénea si las funciones M y N son ambas funciones homogéneas del mismo grado.*

La ecuación diferencial $(x - y)dx + xdy = 0$ es una ecuación homogénea, pues

$$\begin{aligned} M(\lambda x, \lambda y) &= \lambda x - \lambda y \\ &= \lambda(x - y) \\ &= \lambda M(x, y) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} N(\lambda x, \lambda y) &= \lambda x \\ &= \lambda N(x, y). \end{aligned}$$

Es decir, M y N son ambas funciones homogéneas de grado 1.

El siguiente teorema nos dice que toda ecuación diferencial homogénea se puede transformar en separable. Su demostración nos indica cómo realizar esta transformación.

Teorema 1.2. *Si $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es una ecuación diferencial homogénea, entonces un cambio de variable la transforma en separable.*

Demostración. Sea $x = uy$. Derivando implícitamente tenemos $dx = ydu + udy$, reemplazamos estos valores en la ecuación diferencial. Ya que las funciones M y N son ambas funciones homogéneas del mismo grado tenemos

$$y^n M(u,1)(ydu + udy) + y^n N(u,1)dy = 0.$$

Luego $yM(u,1)du + (uM(u,1) + N(u,1))dy = 0$. La última ecuación es claramente una ecuación diferencial en variables separables. □

Observación 1.8. *Utilizando la sustitución $y = vx$ también se consigue una ecuación diferencial en variables separables (realizar los cálculos).*

Ejemplo 1.10. *Resolver la ecuación $(x + y)dx - \left(\frac{x^2}{y}\right) dy = 0$.*

Solución. En este caso, se tiene que $M(x,y) = x + y$, $N(x,y) = -\frac{x^2}{y}$. Veamos si las funciones M y N son ambas funciones homogéneas:

$$\begin{aligned} M(\lambda x, \lambda y) &= \lambda x + \lambda y \\ &= \lambda(x + y) \\ &= \lambda M(x,y). \end{aligned}$$

Para la función N tenemos

$$\begin{aligned} N(\lambda x, \lambda y) &= -\frac{(\lambda x)^2}{\lambda y} \\ &= -\frac{\lambda^2 x^2}{\lambda y} \\ &= \lambda\left(-\frac{x^2}{y}\right) \\ &= \lambda N(x.y). \end{aligned}$$

Puesto que las funciones M y N son ambas funciones homogéneas de grado 1, la ecuación diferencial es homogénea. Por el teorema 1.2 la sustitución $x = uy$ transforma la ecuación $(x + y)dx - \left(\frac{x^2}{y}\right) dy = 0$ en una ecuación diferencial separable. En efecto, la ecuación se transforma en $y^2(u + 1)du + uydy = 0$ (ver ejemplo 1.9 de la pag. 35). Resolviendo esta ecuación separable (realizar las cuentas) se tiene que $\ln(uy) + u = c$ es su solución. Realizando la sustitución inversa se tiene que la relación $\ln x + \frac{x}{y} = c$ es la solución de la ecuación diferencial original.

Ejemplo 1.11. *Resolver la ecuación* $xy' = \sqrt{y^2 - x^2}$.

Solución. Escribimos la ecuación en forma diferencial:

$$\sqrt{y^2 - x^2}dx - xdy = 0$$

Como

$$\begin{aligned} M(\lambda x, \lambda y) &= \sqrt{\lambda^2 y^2 - \lambda^2 x^2} \\ &= \lambda\sqrt{y^2 - x^2} \\ &= \lambda M(x, y). \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} N(\lambda x, \lambda y) &= -(\lambda x) \\ &= \lambda N(x, y), \end{aligned}$$

la ecuación es homogénea. Ponemos $x = uy$. Luego la ecuación se transforma en

$$y^2\sqrt{1 - u^2}du + yu(\sqrt{1 - u^2} - 1)dy = 0.$$

Esta ecuación diferencial es una ecuación en variables separables. El lector puede comprobar que la solución de esta ecuación es

$$-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1 - u^2} + \ln\left(\frac{\sqrt{1 - u^2}}{u} - u\right)\right) + \ln y = c.$$

Para completar la resolución del ejemplo reemplazamos $u = \dfrac{x}{y}$ en la última ecuación.

Observación 1.9. *La ecuación* $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$ *no es una ecuación homogénea cuando por lo menos uno de los coeficientes* c_1 *o* c_2 *son diferentes de cero.*

Este tipo de ecuaciones se pueden transformar en ecuaciones homogéneas cuando el sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

tiene sulución única.

Teorema 1.3. *Si el sistema 1.12 tiene solución única, entonces la ecuación diferencial* $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$ *se puede transformar en una ecuación diferencial homogénea.*

Demostración. Sea (x_0, y_0) la solución del sistema 1.12. Ponemos

$$\begin{cases} x = \mu + x_0, \\ y = \omega + y_0. \end{cases}$$

Tenemos $dx = d\mu$ y $dy = d\omega$. Sustituyendo en la ecuación diferencial resulta que

$$(a_1\mu + a_1x_0 + b_1\omega + b_1y_0 + c_1)d\mu + (a_2\mu + a_2x_0 + b_2\omega + b_2y_0 + c_2)d\omega = 0. \quad (1.13)$$

Ya que (x_0, y_0) es la solución del sistema 1.12 tenemos que $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0$ y $a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0$. Luego, la ecuación 1.13 nos queda como

$$(a_1\mu + b_1\omega)d\mu + (a_2\mu + b_2\omega)d\omega = 0,$$

que es claramente una ecuación diferencial homogénea. □

Ejemplo 1.12. *Resolver la ecuación* $(x + y)dx + (x - y - 1)dy = 0$.

Solución. La solución del sistema

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

es el punto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Ponemos $x = \mu + \frac{1}{2}$ y $y = \omega - \frac{1}{2}$. Reemplazando estos valores y simplificando nos queda $(\mu + \omega)d\mu + (\mu - \omega)d\omega = 0$ (realizar los cálculos) que es una ecuación diferencial homogénea. Ahora utilizamos el cambio de variable que se indica en la demostración del teorema 1.2. Es decir, ponemos $\mu = v\,\omega$, derivando implícitamente la última igualdad obtenemos $d\mu = \omega\, dv + v\, d\omega$. Reemplazamos estos valores en la ecuación diferencial $(\mu + \omega)d\mu + (\mu - \omega)d\omega = 0$; simplificando y agrupando términos obtenemos la ecuación $\omega^2(v + 1)dv + \omega(v^2 + 2v - 1)d\omega = 0$ que es una ecuación separable. La última ecuación la podemos escribir como

$$\frac{v + 1}{v^2 + 2v - 1}dv + \frac{1}{\omega}d\omega = 0. \quad (1.14)$$

La solución de la ecuación 1.14 está dada por $\int \frac{v + 1}{v^2 + 2v - 1}dv + \int \frac{1}{\omega}d\omega = c$. Es decir, la solución de la ecuación 1.14 es $\frac{1}{2}\ln(v^2 + 2v - 1) + \ln\omega = c$; luego, $\omega\sqrt{v^2 + 2v - 1} = c$.

Puesto que $v = \dfrac{\mu}{\omega}$, la solución de la ecuación $(\mu+\omega)d\mu + (\mu-\omega)d\omega = 0$ esta dada por la relación $\mu^2 + 2\mu\omega - \omega^2 = c$ (hacer las cuentas). Finalmente, ya que $\mu = x - \dfrac{1}{2}$ y $\omega = y + \dfrac{1}{2}$, la solución de la ecuación diferencial

$$(x+y)dx + (x-y-1)dy = 0 \text{ (la ecuación de partida)}$$

está dada por la relación $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + 2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(y+\dfrac{1}{2}\right) - \left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2.$

Ejemplo 1.13. *Resolver la ecuación* $(3x+4y-11)dx - (2x+5y-12)dy = 0.$

Solución. La solución del sistema

$$\begin{cases} 3x+4y-11=0 \\ -2x-5y+12=0 \end{cases}$$

es el punto $(1,2)$. Ponemos $x = \mu + 1$ y $y = \omega + 2$. Reemplazando estos valores en la ecuación diferencial nos queda la euación homogénea $(3\mu+4\omega)d\mu - (2\mu+5\omega)d\omega = 0$. Para resolver esta ecuación utilizamos el mismo procedimiento empleado en los ejemplos 1.11 y 1.10 para hallar la solución de una ecuación homogénea. La solución de la ecuación original se la consigue con un proceso análogo al utilizado en el ejemplo 1.12.

Ejercicios

El siguiente bloque de ejercicios ha sido tomado de O'Neil [OP].

1. Comprobar si la función definida por $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{y}{x}$ es homogénea.

2. Comprobar si la ecuación diferencial $x^3\dfrac{dy}{dx} = x^2y - 2y^3$ es homogénea.

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

3. $\dfrac{dy}{dx} = \left(2+\dfrac{y}{x}\right)^2.$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{2x+y-1}{x-2}\right)^2.$

En cada uno de los siguientes ejercicios determine si la ecuación es homogénea o reducible a homogénea. Si lo es, hallar su solución general. Si no lo es, no intente resolverla en este momento.

5. $x\dfrac{dy}{dx} = y^2.$

6. $(x+y)\dfrac{dy}{dx} = y.$

7. $(3x - y - 9)dx - (x + y + 1)dy = 0.$

8. $y' = \dfrac{x - y + 6}{3x - 3y + 4}.$

9. $x^3\dfrac{dy}{dx} = x^2y - y^3.$

10. $x\dfrac{dy}{dx} = y + 4\sqrt{xy}.$

1.4 Ecuaciones diferenciales exactas y factor de integración

Antes de definir una ecuación diferencial exacta recordamos que si F es una función de dos variable que tiene derivadas parciales de primer orden continuas, el diferencial total de F está definido como

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy.$$

Definición 1.9. *La ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ se dice que es una ecuación diferencial exacta si existe una función de dos variables F tal que $dF = M(x,y)dx + N(x,y)dy$.*

El siguiente teorema nos dice cómo saber si una ecuación diferencial es exacta.

Teorema 1.4. *Si las funciones M y N tienen derivadas de primer orden continuas, entonces la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta si y solo si $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.*

Demostración. Supongamos que $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es una ecuación diferencial exacta. Por definición se tiene que existe una función de dos variable F tal que $dF = M(x,y)dx + N(x,y)dy$, luego

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N.$$

Ya que las funciones M y N tienen derivada de primer orden continua se tiene, por el Teorema de Schwarz,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

luego $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Ahora supongamos que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Tenemos que hallar una función de dos variables F tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N \tag{1.16}$$

Afirmamos que la función F definida por:

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) \text{ con } g(y) = \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)dx \right) dy.$$

cumple las condiciones que se piden en las ecuaciones 1.15 y 1.16.

Antes de demostrar que esta afirmación es correcta, comprobemos que la función g es efectivamente una función que depende únicamente de la variable y. Es suficiente ver que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)dx \right) = 0$$

Resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)dx \right) &= \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int M(x,y)dx \\
&= \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \int M(x,y)dx \\
&= \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int M(x,y)dx \right) \\
&= \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ahora veamos que la función F en verdad satisface las ecuaciones 1.15 y 1.16. La ecuación 1.15 es inmediata. Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + \frac{d}{dy}\left(\int N(x,y)dy - \int\left(\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right)dy\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\\ &= N(x,y).\end{aligned}$$

□

Observación 1.10. *En la demostración del teorema 1.4 también podemos utilizar la función F definida como*

$$F(x,y) = \int N(x,y)dy + h(x) \text{ con } h(x) = \int\left(M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)dy\right)dx.$$

Si $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es una ecuación diferencial exacta, entonces su solución está dada por $F(x,y) = c$. La verificación de que esta es efectivamente la solución de la ecuación diferencial exacta se deja como ejercicio para el lector.

El siguiente ejemplo muestra el procedimiento estándar para hallar la solución de una ecuación diferencial exacta.

Ejemplo 1.14. *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0.$$

Solución. Primero comprobamos que la ecuación es exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(x^3 + xy^2)}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial(x^2y + y^3)}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Ya que la ecuación es exacta, existe una función de dos variables F tal que

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x} = M = x^3 + xy^2,\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial y} = N = x^2y + y^3.\end{cases}$$

Integrando respecto a x se tiene que

$$\begin{aligned}F(x,y) &= \int(x^3 + xy^2)dx + g(y)\\ &= \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + g(y)\end{aligned}$$

Para hallar la función g derivamos F con respecto a y e igualamos este resultado a N.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 y + \frac{dg}{dy} = x^2 y + y^3.$$

Esta última igualdad se cumple solamente cuando $\frac{dg}{dy} = y^3$. Luego $g(y) = \frac{y^4}{4}$, reemplazando en la expresión para $F(x, y)$ se tiene que la solución de la ecuación diferencial está dada por

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^4}{4} = c.$$

Ejemplo 1.15. *Hallar la solución de la ecuación diferencial*

$$(e^{2y} - y\cos(xy))dx + (2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y)dy = 0.$$

Solución. Ya que $\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2y} - \cos(xy) + xy\,\text{sen}(xy) = \frac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación es exacta. Luego existe una función F en las variable x, y tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = M = e^{2y} - y\cos(xy) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = N = 2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y. \end{cases}$$

Integrando respecto a x se tiene que

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int (e^{2y} - y\cos(xy))dx + g(y) \\ &= xe^{2y} - \text{sen}(xy) + g(y). \end{aligned}$$

Ahora derivamos respecto a y la expresión hallada para $F(x, y)$. Se tiene que

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2xe^{2y} - x\cos(xy) + g'(y).$$

Como $\frac{\partial F}{\partial y} = N$, tenemos $2xe^{2y} - x\cos(xy) + g'(y) = 2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y$, luego $g'(y) = 2y$, por tanto $g(y) = y^2$. Así, la solución de la ecuación diferencial de este ejemplo está dada por

$$xe^{2y} - \text{sen}(xy) + y^2 = c.$$

Observación 1.11. *Consideremos la ecuación diferencial*

$$2xy\ln y dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2 + 1})dy = 0.$$

En este caso se tiene que $M(x,y) = 2xy\ln y$ *mientras* $N(x,y) = x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}$, *de esta forma* $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$. *Luego, la ecuación diferencial no es exacta.*

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor $\mu = \dfrac{1}{y}$ *tenemos*

$$\begin{cases} M(x,y) = \dfrac{2xy\ln y}{y} \\ N(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}}{y}. \end{cases}$$

Haciendo las cuentas respectivas vemos que $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$. *Luego, la ecuación diferencial es exacta.*

El factor μ ($1/y$ en la observación 1.11) se llama factor de integración. La definición de factor de integración de una ecuación diferencial es la siguiente:

Definición 1.10. *Una función* $\mu(x,y)$ *se llama factor de integración para la ecuación diferencial* $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ *si la ecuación*

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

es una ecuación diferencial exacta.

El procedimiento para hallar el factor de integración, siempre que sea posible, es el siguiente:

A partir de la exactitud de la ecuación $\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$ tenemos

$$\frac{\partial}{\partial y}\mu(x,y)M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\mu(x,y)N(x,y).$$

Derivando parcialmente tenemos

$$\frac{\partial}{\partial y}\mu(x,y)M(x,y) = M(x,y)\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial y} + \mu(x,y)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(x,y)N(x,y) = N(x,y)\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial x} + \mu(x,y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Luego

$$M(x,y)\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial y} + \mu(x,y)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = N(x,y)\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial x} + \mu(x,y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

por tanto

$$\mu(x,y)\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)=N(x,y)\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial x}-M(x,y)\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial y} \tag{1.17}$$

La ecuación 1.17 es una ecuación diferencial en derivadas parciales muy difícil de resolver si no se tiene algún conocimiento adicional sobre $\mu(x,y)$; sin embargo, suponer que $\mu(x,y)$ depende de una sola variable la vuelve muy fácil de resolver.

Supongamos que $\mu(x,y)=f(x)$. En este caso la 1.17 se reduce a

$$f(x)\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)=N(x,y)\frac{df(x)}{dx}.$$

Arreglando términos se tiene

$$\frac{df(x)}{f(x)}=\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)dx,$$

integrando y despejando $f(x)$ tenemos

$$f(x)=e^{\int \frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)dx}. \tag{1.18}$$

Observamos que una condición necesaria y suficiente para que el factor de integración dependa solo de la variable x es que la expresión

$$\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)$$

dependa solo de la variable x.

Ahora supongamos que $\mu(x,y)=g(y)$. En este caso, la ecuación 1.17 se reduce a

$$g(y)\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)=-M(x,y)\frac{dg(y)}{dy}.$$

Arreglando términos, se tiene

$$\frac{dg(y)}{g(y)}=-\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)dy;$$

integrando y despejando $g(y)$ tenemos

$$g(y)=e^{-\int \frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)dy}. \tag{1.19}$$

Observamos que una condición necesaria y suficiente para que el factor de integración dependa solo de la variable y es que la expresión

$$\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)$$

dependa solo de la variable y.

Ejemplo 1.16. *Resolver la ecuación* $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0.$

Solución. Como

$$\frac{\partial(2xy^2 - 3y^3)}{\partial y} = 4xy - 9y^2 \neq -3y^2 = \frac{\partial(7 - 3xy^2)}{\partial x}$$

la ecuación no es exacta. Se puede comprobar (hacerlo) que el factor de integración no depende solo de la variable x, veamos si este depende solo de la variable y.

$$\begin{aligned}\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right) &= \frac{1}{2xy^2 - 3y^3}\left(4xy - 9y^2 + 3y^2\right)\\ &= \frac{2y(2x - 3y)}{y^2(2x - 3y)}\\ &= \frac{2}{y}.\end{aligned}$$

Luego, según la ecuación 1.19 el factor de integración está dado por:

$$\begin{aligned}g(y) &= e^{-\int \frac{2}{y}dy}\\ &= e^{-2\ln y}\\ &= y^{-2}.\end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por este factor de integración obtenemos la (nueva) ecuación

$$(2x - 3y)dx + (7y^{-2} - 3x)dy = 0.$$

Para esta ecuación vemos que se satisface la condición de exactitud. En efecto, tenemos

$$\frac{\partial(2x - 3y)}{\partial y} = -3 = \frac{\partial(7y^{-2} - 3x)}{\partial x}.$$

A partir de este punto resolvemos la ecuación diferencial con el procedimiento que vimos anteriormente.

Ejemplo 1.17. *Hallar un factor de integración para la ecuación* $(x^2 + y)dx - xdy = 0.$

Solución. Como

$$\frac{\partial(-x)}{\partial x} = -1 \neq 1 = \frac{\partial(x^2 + y)}{\partial y}$$

la ecuación no es excata. Vea mos si el factor de integración depende únicamente de la variable x.

$$\begin{aligned}\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)&=\frac{1}{-x}(1-(-1))\\&=-\frac{2}{x}.\end{aligned}$$

Luego, según la ecuación 1.18, el factor de integración está dado por:

$$\begin{aligned}f(y)&=e^{\int(-\frac{2}{x})dx}\\&=e^{-2\ln x}\\&=x^{-2}.\end{aligned}$$

El lector puede comprobar sin dificultad que la función $f(x)=x^{-2}$ es un factor de integración de la ecuación $(x^2+y)dx-xdy=0$.

Observación 1.12. *Como se indicó anteriormente, hallar un factor de integración es una tarea relativamente sencilla si este factor depende únicamente de una sola variable. Sin embargo, cuando el factor de integración depende de las dos variables y además tenemos alguna condición adicional sobre este factor, es posible calcularlo.*

Ejemplo 1.18. *Resolver la ecuación* $(3y^2-x)dx+(2y^3-6xy)dy=0$ *si se sabe que un factor de integración* $\mu(x,y)$ *depende de las variables* x, y *según la ley* $\varphi(x+y^2)$*, es decir* $\mu=\varphi(x+y^2)$.

Solución. Se deja como ejercicio comprobar que la ecuación no es exacta y además comprobar que el factor de integración no depende de una sola variable. El procedimiento que se sigue en este caso es el siguiente: Ponemos $z=x+y^2$ y calculamos las derivadas parciales de z respecto a las variables x, y. Tenemos

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=1,\\[2mm]\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y.\end{cases}$$

Aplicando la regla de la cadena tenemos

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \mu}{\partial x}=\dfrac{\partial \mu}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{d\mu}{dz},\\[2mm]\dfrac{\partial \mu}{\partial y}=\dfrac{\partial \mu}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y\dfrac{d\mu}{dz}.\end{cases}$$

Notamos que $\dfrac{\partial \mu}{\partial z} = \dfrac{du}{dz}$ está justificada por la condición $\mu = \varphi(x + y^2) = \varphi(z)$. Reemplazando estos valores en la ecuación 1.17 tenemos

$$\mu(z)\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right) = N(x,y)\frac{d\mu(z)}{dz} - 2yM(x,y)\frac{d\mu(z)}{dz}$$

Luego

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(z)}d\mu(z) &= \frac{1}{N(x,y) - 2yM(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)dz \\ &= \frac{12y}{-4y(x+y^2)}dz \\ &= -\frac{3}{z}dz.\end{aligned}$$

Integrando y despejando el factor de integración se tiene que $\mu(x,y) = (x + y^2)^{-3}$. Multiplicando la ecuación diferencial por este factor $\mu(x,y)$ tenemos la nueva ecuación

$$\frac{3y^2 - x}{(x+y^2)^3}dx + \frac{2y^3 - 6xy}{(x+y^2)^3}dy = 0. \tag{1.20}$$

Comprobemos que esta ecuación diferencial es exacta.

La derivada parcial de $M(x,y)$ con respecto a la variable y es:

$$\begin{aligned}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3y^2 - x}{(x+y^2)^3}\right) \\ &= \frac{12y(x-y^2)}{(x+y^2)^4}.\end{aligned}$$

La derivada parcial de $N(x,y)$ con respecto a la variable x es:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y^3 - 6xy}{(x+y^2)^3}\right) \\ &= \frac{12y(x-y^2)}{(x+y^2)^4}.\end{aligned}$$

Como la ecuación 1.20 es excata, existe una función F en las variables x, y tal que

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{3y^2 - x}{(x+y^2)^3} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{2y^3 - 6xy}{(x+y^2)^3}.\end{cases}$$

Integrando respecto a la variable x, tenemos $F(x,y) = \displaystyle\int \frac{3y^2 - x}{(x+y^2)^3}dx$. Puesto que

$\dfrac{x}{(x+y^2)^3} = \dfrac{1}{(x+y^2)^2} - \dfrac{y^2}{(x+y^2)^3}$, tenemos

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int \frac{3y^2 - x}{(x+y^2)^3} dx \\ &= 3y^2 \int \frac{dx}{(x+y^2)^3} - \int \frac{x}{(x+y^2)^3} dx + h(y) \\ &= -\frac{3y^2}{2(x+y^2)^2} + \frac{1}{x+y^2} - \frac{y^2}{2(x+y^2)^2} + h(y) \\ &= -\frac{2y^2}{(x+y^2)^2} + \frac{1}{x+y^2} + h(y). \end{aligned}$$

Derivando esta expresión respecto a la variable y tenemos $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{2y^3 - 6xy}{(x+y^2)^3} + h'(y)$. Luego $h'(y) = 0$, por tanto $h(y) = k$, donde k es una constante. Así, la solución de la ecuación diferencial es $-\dfrac{2y^2}{(x+y^2)^2} + \dfrac{1}{x+y^2} = c$.

Ejemplo 1.19. *Hallar un factor de integración para la ecuación diferencial de primer orden* $(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xy\,dy = 0$ *si se sabe que este depende de las variables* x, y *según la ley* $\varphi(x,y) = y^2 - x^2$.

Solución. Ponemos $z = y^2 - x^2$. Aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mu}{\partial x} = -2x \dfrac{d\mu}{dz}, \\ \dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 2y \dfrac{d\mu}{dz}. \end{cases}$$

Como $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y$ y $\dfrac{\partial N}{\partial x} = -2y$, reemplazando en la cuación 1.17 tenemos $2y(y^2 - x^2 + 1)\dfrac{d\mu}{dz} = -4y\mu$, luego $(z+1)\dfrac{d\mu}{dz} = -2\mu$. Integrando, se tiene que $\mu(x,y) = (y^2 - x^2 + 1)^{-2}$.

Se deja como ejercicio para el lector la comprobación de que $(y^2 - x^2 + 1)^{-2}$ es efectivamente un factor de integración de la ecuación $(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xy\,dy = 0$.

Ejercicios

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $2xy\,dx + (x^2 - 1)\,dy = 0$.

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y^2}{2xy + y}$.

3. $\left(4x^3y^3 + \dfrac{1}{x}\right) dx + \left(3x^4y^2 - \dfrac{1}{y}\right) dy = 0$

En cada una de las siguientes ecuaciones hallar un factor de integración μ.

4. $(2xy + y^4)\, dx(3x^2 + 6xy^3)\, dy = 0$, $\mu \equiv \varphi(y)$.

5. $(1 + y)\, dx + (1 - x)\, dy = 0$, $\mu \equiv \varphi(x)$.

6. $(3y^2 - x)\, dx + (2y^3 - 6xy)\, dy = 0$, $\mu \equiv \varphi(x + y^2)$.

Ecuaciones lineales de primer orden

Un tipo particularmente importante de ecuaciones diferenciales de primer orden son las ecuaciones lineales. Su forma es la siguiente:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \tag{1.21}$$

donde $p(x)q(x) \neq 0$. Cuando $p(x) = 0$ o $q(x) = 0$, la ecuación 1.21 se reduce a una ecuación diferencial separable.

Para hallar la solución de la ecuación 1.21 la escribimos en su forma diferencial

$$(q(x) - p(x)y)dx - dy = 0.$$

Se puede comprobar fácilmente que esta ecuación no es exacta. Veamos que esta ecuación tiene un factor de integración que depende únicamente de la variable x. En efecto,

$$\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right) = p(x).$$

Se tiene que un factor de integración de la ecuación es $e^{\int p(x)dx}$. Luego, la ecuación

$$e^{\int p(x)dx}(q(x) - p(x)y)dx - e^{\int p(x)dx}dy = 0$$

es una ecuación diferencial exacta, por lo tanto existe una función de dos variables F tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = e^{\int p(x)dx}(q(x) - p(x)y), \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y} = -e^{\int p(x)dx}, \end{cases}$$

De la segunda ecuación tenemos

$$F(x,y) = -ye^{\int p(x)dx} + h(x).$$

Puesto que la función F tiene que satisfacer la primera ecuación tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= -yp(x)e^{\int p(x)dx} + \frac{dh(x)}{dx}\\ &= e^{\int p(x)dx}(q(x) - p(x)y).\end{aligned}$$

Luego $\dfrac{dh(x)}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$. Esta última ecuación nos dice que el valor para $h(x)$ está dado por:

$$h(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

La solución de la ecuación 1.21 es $-ye^{\int p(x)dx} + \displaystyle\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = c$. Despejando y nos queda

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right). \tag{1.22}$$

Ejemplo 1.20. *Resolver la ecuación* $(3x^2y - x^2)dx + dy = 0$.

Solución. Primero escribimos la ecuación en la forma $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$. Dividiendo la ecuación por dx y trasponiendo términos se tiene

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2y = x^2.$$

La ecuación tiene un factor de integración de la forma $\mu(x) = e^{\int 3x^2dx} = e^{x^3}$. Luego, la ecuación $x^2e^{x^3}(3y-1)dx + e^{x^3}dy = 0$ es exacta, por tanto existe una función F en las variables x, y tal que

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x} = x^2e^{x^3}(3y-1),\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial y} = e^{x^3}.\end{cases}$$

Integrando la segunda ecuación respecto a la variable y tenemos $F(x,y) = e^{x^3}y + h(x)$. Ahora, derivando F respecto a x tenemos $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 3x^2e^{x^3}y + h'(x)$. Igualando esta expresión con la primera ecuación se tiene $h'(x) = -x^2e^{x^3}$. Así, $h(x) = -\dfrac{e^{x^3}}{2}$. La solución de la ecuación diferencial esta dada por $e^{x^3}y - \dfrac{e^{x^3}}{2} = c$. Despejando y se tiene

$$y = e^{-x^3}\left(\frac{e^{x^3}}{2} + c\right).$$

Ejemplo 1.21. *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 2xe^{-x^2}.$$

Solución. Para utilizar la fórmula 1.22, primero identificamos las funciones p y q. En este ejemplo, se tiene que $p(x) = 2x$ y $q(x) = 2xe^{-x^2}$. Ahora calculamos $e^{-\int p(x)}dx$.

$$\begin{aligned} e^{-\int p(x)}dx &= e^{-\int 2xdx} \\ &= e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right) \\ &= e^{-x^2}\left(\int 2xe^{-x^2}e^{x^2}dx + c\right) \\ &= e^{-x^2}\left(\int 2xdx + c\right) \\ &= e^{-x^2}(x^2 + c). \end{aligned}$$

Observación 1.13. *La ecuación 1.21 se dice que es lineal en la variable y. Una ecuación lineal, por ejemplo, en la variable x tiene la forma*

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y).$$

Ejercicios

Los siguientes ejercicios han sido tomados de O'Neil [OP].

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $y' + y = \operatorname{sen} x$.
2. $y' + \frac{1}{x}y = 3x^2$.
3. $\operatorname{sen}(2x)y' + 2\operatorname{sen}^2(x)y = 2\operatorname{sen}(x)$.
4. $y' + xy = \cos x$.
5. $(x^2 - x - 2)y' + 3xy = x^2 - 4x + 4$.

6. $\left(1 - 2xe^{2y}\right)\dfrac{dy}{dx} - e^{2y} = 0.$

Ecuaciones de Bernoulli

Se llama ecuación diferencial de Bernoulli a una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n, \tag{1.23}$$

donde n es un número real diferente de 0 y 1.

Observación 1.14. *Para resolver la ecuación 1.23 primero la multiplicamos por y^{-n} y luego la reducimos a una ecuación diferencial lineal de primer orden con la sustitución $z = y^{1-n}$.*

En efecto, multiplicando la Ecuación 1.23 por y^{-n} nos queda la nueva ecuación

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x).$$

Ahora usamos la sustitución $z = y^{1-n}$. Tenemos que $\dfrac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$. Luego $y^{-n}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1-n}\dfrac{dz}{dx}$. Sustituyendo estos valores tenemos $\dfrac{1}{1-n}\dfrac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$ que podemos escribirlo como

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x).$$

Esta última ecuación es, claramente, una ecuación diferencial lineal en la variable z.

Ejemplo 1.22. *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$x\frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x.$$

Solución. Primero dividimos la ecuación por x para que esta tenga la forma estándar de una ecuación de Bernoulli. El resultado es la siguiente ecuación:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{y^2 \ln x}{x}.$$

Ahora multiplicando esta última ecuación por y^{-2} se llega a la siguiente ecuación:

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + \frac{y^{-1}}{x} = \frac{\ln x}{x}.$$

Ponemos $z = y^{-1}$, luego $\dfrac{dz}{dx} = -y^{-2}\dfrac{dy}{dx}$. Reemplazando estos valores y multiplicando por -1 se obtiene la ecuación

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = -\frac{\ln x}{x}.$$

Esta ecuación es una ecuación de primer orden lineal cuya solución es

$$z = x\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + c\right).$$

Luego, la solución de la ecuación de Bernoulli está dada por:

$$y^{-1} = x\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + c\right).$$

Ejercicios

Los siguientes ejercicios han sido tomados de O'Neil [OP].

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $\dfrac{dy}{dx} + y = y^4$.
2. $x^2\dfrac{dy}{dx} + xy = -y^{-3/2}$.
3. $y^2\dfrac{dy}{dx} + 2xy = x^4$.
4. $xy^2 + y + \dfrac{dy}{dx}$.
5. $x^3\dfrac{dy}{dx} + x^2y = 2y^{-4/3}$.

1.5 Ejercicios del Capítulo 1

El siguiente bloque de ejercicios ha sido tomado de Zill [ZD, Cap. 3] y Makerenko, Kiseliov y Krasnov [MK, pag. 34–60], a excepción de los ejercicios 14 y 15.

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

   a) $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$.

b) $y' + \operatorname{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$.

c) $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$.

d) $\left(x - y\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)dx + x\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)dy = 0$.

e) $(2x - 4y)dx + (x + y - 3)dy = 0$.

f) $3xy' - 2y = \dfrac{x^3}{y^2}$.

g) $2\operatorname{sen}(x)y' + y\cos(x) = y^3(x\cos(x) - \operatorname{sen}(x))$.

h) $2x + 2y - 1 + y'(x + y - 2) = 0$.

i) $(x - y + 3)dx + (3x + y + 1)dy = 0$

j) $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$.

k) $8xy' - y = -\dfrac{1}{y^3\sqrt{x+1}}$.

l) $2y'\operatorname{sen}x + y\cos x = y^3(x\cos x - \operatorname{sen}x)$.

2. Hallar un factor de integración de las siguientes ecuaciones

   a) $(x^2 + y)dx - xdy = 0$.

   b) $(x + \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}y)dx + \cos y\, dy = 0$.

   c) $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$.

   d) $xdx + ydy + x(xdy - ydx) = 0$, $\mu = \varphi(x^2 + y^2)$.

   e) $3ydx + 4xdy = 0$.

   f) $4ydx - xdy = 0$.

   g) $3x^2ydx + ydy = 0$.

   h) $x^{-2}y^{-5}dx + x^{-3}y^{-4}dy = 0$, $\mu = \varphi(x^3y^5)$.

3. Un cultivo tiene una cantidad inicial N_0 de bacterias. Cuando $t = 1$ hora, la cantidad medida de bacterias es $\dfrac{3}{2}N_0$. Si la razón de reproducción es proporcional a la cantidad de bacterias presentes, calcule el tiempo necesario para triplicar la cantidad inicial de los microorganismos.

4. Un reactor de cría convierte al uranio 238, relativamente estable, en plutonio 239, un isótopo radiactivo. Al cabo de 15 años, se ha desintegrado el 0.043 % de la cantidad inicial, A_0, de una muestra de plutonio. Calcule el período medio de ese isótopo, si la razón de desintegración es proporcional a la cantidad presente.

5. Al sacar un pastel del horno, su temperatura es $300\,^\circ F$. Después de tres minutos, $200\,^\circ F$. ¿En cuanto tiempo se enfriará hasta la temperatura ambiente de $70\,^\circ F$?

6. Un acumulador de 12 volts se conecta a un circuito en serie LR, con una inductancia de $\frac{1}{2}$ henry y una resistencia de 10 ohms. Determinar la corriente i, si la corriente inicial es cero.

7. Se sabe que la población de cierta comunidad aumenta con una razón proporcional a la cantidad de personas que tiene en cualquier momento. Si la población se duplicó en cinco años, ¿en cuanto tiempo se triplicará y cuadruplicará?

8. Cuando $t = 0$, había 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Al cabo de seis horas, esa cantidad disminuyó el 3 %. Si la razón de desintegración, en cualquier momento, es proporcional a la cantidad de la sustancia presente, calcule la cantidad que queda después de dos horas.

9. Cuando pasa un rayo vertical de luz por una sustancia transparente, la razón con que decrece su intensidad I es proporcional a $I(t)$, donde t representa el espesor, en pies, del medio. En agua de mar clara, la intensidad, a tres pies bajo la superficie, es el 25 % de la intensidad inicial I_0 del rayo incidente. ¿Cuál es la intensidad del rayo a 15 pies bajo la superficie?

10. Un termómetro se lleva de un recinto interior hasta el ambiente exterior, donde la temperatura del aire es $5\,^\circ F$. Después de un minuto, el termómetro indica $55\,^\circ F$, y después de cinco marca $30\,^\circ F$. ¿Cuál era la temperatura del recinto interior?

11. Se aplica una fuerza electromotriz de 30 voltios a un circuito en serie LR con 0.1 henry de inductancia y 50 ohmio de resistencia. Determine la corriente $i(t)$,

s $i(0) = 0$. Halle la corriente cuando $t \to \infty$.

12. Un tanque está parcialmente lleno con 100 galones de salmuera, con 10 libras de sal disuelta. Le entra salmuera con $\frac{1}{2}$ libra de sal por galón a un flujo de 6 gal/min. El contenido del tanque está bien mezclado y de él sale un flujo de 4 gal/min de solución. Calcule la cantidad de libras de sal que hay en el tanque a los 30 minutos.

13. Una ecuación diferencial que describe la velocidad v de una masa m en caída sujeta a una resistencia del aire proporcional a la velocidad instantánea es

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv,$$

donde k es una constante de proporcionalidad positiva.

    a) Resuelva la ecuación, sujeta a la condición inicial $v(0) = v_0$.

    b) Calcule la velocidad límite (o terminal) de la masa.

    c) Si la distancia s se relaciona con la velocidad por medio de la ecuación $\frac{ds}{dt} = v$, deduzca una ecuación explícita para s, si también se sabe que $s(0) = s_0$.

14. Inicialmente había 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Después de seis horas su masa disminuyó en un 3 %. Si en un instante cualquiera la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad de sustancia presente, determinar la cantidad que queda después de 24 horas.

15. La rapidez con que cierto medicamento se disemina en el flujo sanguíneo se rige por el siguiente problema con condiciones iniciales

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A - Bx \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

donde A y B son constantes positivas. La cantidad $x(t)$ describe la concentración del medicamento en el flujo sanguíneo en un instante cualquiera t. Encontrar el valor límite de x cuando $t \to \infty$. ¿Cuánto tarda la concentración en alcanzar la mitad de este valor límite?

Capítulo 2

Ecuaciones Diferenciales lineales de orden superior

En el capítulo 1, se estudió las ecuaciones diferenciales de primer orden y se indicó como formular modelos matemáticos para hallar la solución de un problema particular (ver sección 1.1). Naturalmente los modelos matemáticos ahí planteados se presentaban con el apelativo de problemas con condiciones iniciales donde la ecuación diferencial es una ecuación diferencial de primer orden.

Los modelos matemáticos que se construyen con ecuaciones diferenciales de orden superior cubren una amplia gama de situaciones que van desde el problema de determinar el movimiento vibratorio de sistemas mecánicos hasta problemas relacionados con la cardiología.

En este capítulo, estudiamos técnicas resolutivas de una ecuación diferencial lineal de orden superior y damos algunos ejemplos de aplicación de estas. En la sección 2.1, describimos las propiedades básicas de las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior. En la sección 2.2, indicamos cómo hallar las soluciones de una ecuación diferencial lineal de orden superior homogénea con coeficientes constantes. En la secció 2.3, presentamos los métodos de coeficientes indeterminados y variación de parámetros para hallar una solución particular de la ecuación diferencial lineal de orden superior completa con coeficientes constantes. La sección 2.4 (que puede ser omitida en un curso introductorio a las ecuaciones diferenciales ordinarias) estudia la forma de hallar las soluciones en series de potencias de una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes variables. Finalmente, en la sección 2.5, mostramos algunos modelos matemáticos con ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

2.1 Teoría básica de las ecuaciones diferenciales lineales

Definición 2.1. *Una ecuación diferencial lineal de orden n en la variable independiente y, y variable dependiente x es una ecuación diferencial que tiene,*

o se puede escribir, la forma

$$a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + \ldots + a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} = F(x), \tag{2.1}$$

donde las funciones $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *y* $F(x)$ *son funciones continuas en un intervalo* $[a, b]$ *con* $a_n(x) \neq 0$ *para todo* x *en el intervalo* $[a, b]$.

Si, en la ecuación 2.1, la función F es idénticamente igual a cero para todo x en $[a, b]$, la ecuación se llama homogénea. En caso contrario, se llama completa. Además, en el caso de una ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden completa, la función F se llama término no homogéneo.

Observación 2.1. *Si, en la ecuación 2.1, las funciones* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *son constantes en* $[a, b]$*, la ecuación se llama ecuación diferencial lineal de orden* n *con coeficientes constantes. La ecuación 2.1 se dice que es una ecuación diferencial lineal con coeficientes variables cuando al menos una función* a_i *no es idénticamente igual a una constante en* $[a, b]$.

Las siguientes ecuaciones son ejemplos de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior.

1. $5\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} + y = x^2e^x$ es una ecuación diferencia lineal de tercer orden completa con coeficientes constantes.
2. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 4\operatorname{sen} x\frac{dy}{dx} + (x^3 + 4x - 1)y = e^x$ es una ecuación diferencial lineal de segundo orden completa con coeficientes variable.
3. $\operatorname{sen} x\frac{d^3y}{dx^3} + \cos x\frac{dy}{dx} - y = 0$ es una ecuación diferencial lineal de tercer orden homogénea con coeficientes variables.
4. $2\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{d^3y}{dx^3} + 7\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ es una ecuación diferencial lineal de cuarto orden homogénea con coeficientes constantes.

El siguiente teorema es una generalización del teorema 1.1 para el caso de ecuaciones diferenciales lineales de n-ésimo orden. Este teorema nos da una condición suficiente para la existencia y unicidad de soluciones de un problema con condiciones iniciales donde la ecuación diferencial es una ecuación lineal de orden n.

Teorema 2.1. *Si las funciones $a_0, a_1, \ldots, a_n, F$ son continuas en un intervalo $[a,b]$, $a_n(x) \neq 0$ para todo x de $[a,b]$ y x_0 está en $[a,b]$, entonces existe una solución única para el problema con condiciones iniciales*

$$\begin{cases} a_0(x)y + a_1(x)\dfrac{dy}{dx} + \ldots + a_n(x)\dfrac{d^n y}{dx^n} = F(x), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ y''(x_0) = y_2, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Además, esta solución está definida para todo x en $[a,b]$.

Igual que en el capítulo 1, no damos la demostración de este teorema pues esta utiliza técnicas que caen fuera del alcance de este texto.

Los siguientes ejemplos muestran la utilidad de este teorema.

Ejemplo 2.1. *Decidir si el siguiente problema con condiciones iniciales:*

$$\begin{cases} (x^2+1)\dfrac{d^3y}{dx^3} - 5\cos x\dfrac{dy}{dx} + (x-1)^3 y = \operatorname{sen} x \\ y(3) = 2 \\ y'(3) = -1 \\ y''(3) = 0 \end{cases}$$

tiene solución unica en algún intervalo.

Solución. Ya que las funciones $(x^2+1), -5\cos x, (x-1)^3$ y $\operatorname{sen} x$ son continuas para todo x tal que $-\infty < x < +\infty$, $x^2+1 \neq 0$ para todo x tal que $-\infty < x < \infty$ y, $x_0 = 3$ está en el intervalo $(-\infty, +\infty)$. Por el teorema 2.1, se puede asegurar que existe una única función real f definida en $(-\infty, +\infty)$ tal que

$$x^2\frac{d^3 f(x)}{dx^3} - 5\cos x\frac{df(x)}{dx} + (x-1)^3 f(x) = \operatorname{sen} x$$

para todo x real. Además, esta función satisface las condiciones iniciales, es decir $f(3) = 2$, $f'(3) = -1$ y $f''(3) = 0$.

Ejemplo 2.2. *Decidir si el problema*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2-1}\dfrac{d^2y}{dx^2} + \sqrt{x^2-25}\dfrac{dy}{dx} + (x-3)y = e^{2x+3} \\ y(5/2) = -3 \\ y'(5/2) = 4 \\ y''(5/2) = 0 \end{cases}$$

tiene solución.

Solución. Se puede demostrar (hacerlo) que las funciones $\dfrac{1}{x^2-1}$, $\sqrt{x^2-25}$, $x-3$ y e^{2x+3} son continuas en el intervalo $[2,4]$. Además, $\dfrac{1}{x^2-1} \neq 0$ para cada $x \in [2,4]$.

Por el teorema 2.1, ya que $\dfrac{5}{2} \in [2,4]$, se puede asegurar que existe una única función real f definida en $[2,4]$ tal que

$$\frac{1}{x^2-1}\frac{d^2f(x)}{dx^2} + \sqrt{x^2-25}\frac{df(x)}{dx} + (x-3)f(x) = e^{2x+3}$$

y $f(5/2) = -3$, $f'(5/2) = 4$ y $f''(5/2) = 0$.

Como muestran los ejemplos 2.1 y 2.2, el teorema 2.1 no nos dice como hallar la solución a un problema con condiciones iniciales pero, nos dice cuando tiene sentido buscar una solución.

Observación 2.2. *Como se indicó en el capitulo 1 (ver observación 1.5), la solución que se pueda obtener aplicando algún método resolutivo puede ser una solución implícita. A partir del teorema 2.1, podemos estar seguros que esta solución implícita determina una función f (solución explícita) definida en algún intervalo I.*

El siguiente corolario es de mucha utilidad, pues nos dice bajo qué condiciones la solución de una ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden se reduce a la solución trivial.

Corolario 2.1. *Sea f una solución en el intervalo cerrado I de la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden*

$$a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + \ldots + a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} = 0,$$

x_0 un punto de I tal que $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$. Si las funciones $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son continuas en I, $a_n(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ y $x_0 \in I$, entonces $f(x) = 0$ para todo x de I.

Por ejemplo, la única solución de la ecuación diferencial homogénea de tercer orden

$$\cos x \frac{d^3y}{dx^3} - 5x^2 \frac{dy}{dx} + 3x^3 y = 0,$$

tal que $y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$ es la función f definida por $f(x) = 0$ para todo x real.

La ecuación lineal homogénea de n-ésimo orden

Ahora consideramos resultados fundamentales sobre la ecuación diferencial homogénea de n-ésimo orden

$$a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + \ldots + a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} = 0, \tag{2.2}$$

donde las funciones $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son funciones continuas en un intervalo $[a, b]$ con $a_n(x) \neq 0$ para todo x en el intervalo $[a, b]$.

El primer resultado básico (cuya demostración es trivial) es el siguiente teorema:

Teorema 2.2. *Si $f_1, f_2, \ldots, f_m$ son m soluciones arbitrarias de la ecuación diferencial homogénea 2.2 y $c_1, c_2, \ldots, c_m$ son constantes cualesquiera, entonces la función $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m$ también es una solución de la ecuación 2.2.*

El Teorema 2.2 nos dice cómo crear "nuevas soluciones" de una ecuación diferencial homogénea de n-ésimo orden cuando se conocen algunas soluciones de la ecuación. Por ejemplo, las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son soluciones (comprobarlo) de la ecuación diferencial homogénea

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

Por el teorema 2.2, la función $c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$ (claramente diferente a las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$) también es solución de la ecuación diferencial donde, c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Observación 2.3. *Si* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *son* m *funciones dadas y* $c_1, c_2, \ldots, c_m$ *son* m *constantes, entonces la expresión*

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m$$

se llama una combinación lineal de $f_1, f_2, \ldots, f_m$*.*

En términos de combinaciones lineales, el teorema 2.2 expresa el hecho de que cualquier combinación lineal de soluciones de la ecuación diferencial homogénea 2.2 sigue siendo una solución.

Nuestro siguiente paso es entender el concepto de solución general de la ecuación diferencial homogénea 2.2. Para comprender completamente este concepto debemos primero definir los conceptos de dependencia e independencia lineal.

Definición 2.2. *Las funciones* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *se dicen que son linealmente dependientes en el intervalo* $[a, b]$ *si existen constantes* $c_1, c_2, \ldots, c_m$ *no todas iguales a cero tal que*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_m f_m(x) = 0$$

para todo x *en* $[a, b]$*.*

Observación 2.4. *En la definición 2.2, pedimos que todas las funciones* f_i*, para* $1 \leq i \leq m$*, sean diferentes de la función nula en* $[a, b]$*, pues, si alguna de ellas es nula, entonces estas son linealmente dependientes.*

Un ejemplo de funciones linealmente dependientes en el intervalo $[0, 1]$ son las funciones f_1 y f_2 definidas por $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = 2x$ pues existen las constantes $c_1 = 2$ y $c_2 = -1$ tal que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 2x - 2x = 0$$

para todo x en el intervalo $[0, 1]$.

Otro ejemplo de funciones linealmente dependientes son las funciones $\operatorname{sen} x$, $3 \operatorname{sen} x$ y $-\operatorname{sen} x$ que resultan ser linealmente dependientes en cualquier intervalo $[a, b]$ pues existen las constantes $c_1 = 1$, $c_2 = 1$ y $c_3 = 4$ tal que

$$c_1 \operatorname{sen} x + c_2(3 \operatorname{sen} x) + c_3(-\operatorname{sen} x) = 0$$

para todo valor de x en $[a, b]$.

Observación 2.5. *Desde los ejemplos anteriores, se podría pensar que si las funciones* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *son linealmente dependientes, entonces una de ellas se puede expresar como combinación lineal de las otras. Dejamos como ejercicio para el lector demostrar que esta intuición es correcta.*

Definición 2.3. *Las funciones* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *se dicen que son linealmente independientes en el intervalo* $[a, b]$ *si no son linealmentes dependientes en el intervalo* $[a, b]$.

Notamos que las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_m$ son linealmente independientes en el intervalo $[a, b]$ cuando se cumple la siguiente condición: Si la ecuación

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_m f_m(x) = 0$$

se cumple para todo x en el intervalo $[a, b]$, entonces $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$. En otras palabras, la única combinación lineal de $f_1, f_2, \ldots, f_m$ que es idénticamente igual a cero en el intervalo $[a, b]$ es la combinación lineal trivial

$$0 \cdot f_1(x) + 0 \cdot f_2(x) + \ldots + 0 \cdot f_m(x) = 0.$$

Ejemplo 2.3. *Averiguar si las funciones* x *y* x^2 *son linealmente independientes en el intervalo* $[0, 1]$.

Solución. Para ver que estas funciones son linealmente independientes en el intervalo $[0, 1]$ debemos probar lo siguiente: Si $c_1 x + c_2 x^2 = 0$ para todo x en el intervalo $[0, 1]$, entonces $c_1 = c_2 = 0$. En efecto, a partir de $c_1 x + c_2 x^2 = 0$ para todo x en el intervalo $[0, 1]$ tenemos (derivando ambos lado de la ecuación) $c_1 + 2c_2 x = 0$ para todo x en el intervalo $[0, 1]$, luego $c_1 x + 2c_2 x^2 = 0$ para todo x en el intervalo $[0, 1]$. Así, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} c_1 x + c_2 x^2 = 0 \\ c_1 x + 2c_2 x^2 = 0 \end{cases}$$

que debe satisfacerse para todo x en el intervalo $[0,1]$. Restando la segunda ecuación de la primera se tiene que $c_2x^2 = 0$ todo x en el intervalo $[0,1]$, luego $c_2 = 0$. De manera similar se tiene que $c_1 = 0$.

El siguiente teorema asegura la existencia de un conjunto de soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial homogénea 2.2 y cual es el significado de tales conjuntos linealmente independientes.

Teorema 2.3. *La ecuación diferencial homogénea de n-ésimo orden 2.2 siempre tiene n soluciones linealmente independientes. Además, si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son n soluciones linealmente independientes de la ecuacón diferencial homogénea de n-ésimo orden 2.2, entonces cualquier solución f de la ecuación 2.2 puede expresarse como una combinación lineal $c_1f_1 + c_2f_2 + \ldots + c_nf_n$ de estas n soluciones linealmente independientes.*

Para ver cómo se puede aplicar el teorema 2.3 consideremos las funciones definidas por $f_1(x) = \operatorname{sen} x$ y $f_2(x) = \cos x$. Como vimos anteriormente (ver pag. 64) estas funciones son soluciones de la ecuación diferencial homogénea de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \tag{2.3}$$

para todo x tal que $-\infty < x < +\infty$. Además, estas funciones son linealmente independientes para todo x en el intervalo $(-\infty, +\infty)$ (demostrarlo). Luego, si una función f es solución de la ecuación diferencial 2.3, entonces, por el teorema 2.3, f puede ser expresada como combinación lineal de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, esto es $f(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$ para valores adecuados de las constantes c_1 y c_2. Además, esta igualdad se cumple para todo x en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

De esta forma, por ejemplo, la función definida por

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen} x \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \cos x \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$$

es solución de la ecuación 2.3.

Observación 2.6. *Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n$ un conjunto de n soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial 2.2. Por un lado, desde el teorema 2.2*

conocemos que la conbinación lineal

$$c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_nf_n, \tag{2.4}$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *son constantes arbitrarias, es una solución de la ecuación 2.2. Por otro lado, por el teorema 2.3 conocemos que si* f *es cualquier solución de la ecuación diferencial 2.2, entonces esta puede ser expresada como la combinación lineal 2.4 de las* n *soluciones linealmente independientes* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *para una adecuada elección de las constantes* $c_1, c_2, \ldots, c_n$*. Así, una combinación lineal de las* n *soluciones linealmente independientes* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *con* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *constantes arbitrarias debe contener todas las soluciones de la ecuación diferencial 2.2. Por esta razón, nos referimos al conjunto de* n *soluciones linealmente independientes como "un conjunto fundamental" de soluciones de la ecuación diferencial 2.2 y llamamos solución "general" de la ecuación diferencial 2.2 a una combinación lineal de las* n *soluciones linealmente independientes.*

A continuación se define rigurosamente lo que entendemos como conjunto fundamental de soluciones de una ecuación diferencial homogénea de orden n y cual es su solución general.

Definición 2.4. *Sean* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *soluciones de la ecuación diferencial homogénea de* n*-ésimo orden 2.2 en el intervalo* $[a, b]$*. El conjunto* $A = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ *se llama conjunto fundamental de soluciones de la ecuación 2.2 en el intervalo* $[a, b]$ *si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *A es un conjunto maximal de funciones linealmente independientes.*
2. *Cualquier solución de la ecuación 2.2 se puede expresar como*

$$c_1f_1 + c_2f_2 + \ldots + c_mf_m,$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_m$ *son constantes arbitrarias.*

En la definición 2.4, se entiende como conjunto maximal de funciones linealmente independientes a aquel conjunto que contiene el máximo número de funciones

linealmente independientes, es decir, si B es un conjunto de funciones linealmente independientes, entones $B \subseteq A$. Además, la función definida como la combinación lineal de las funciones $f_1, \ldots, f_m$ de este conjunto maximal A se llama solución general de la ecuación diferencial 2.2 en el intervalo $[a, b]$.

Observación 2.7. *Por el teorema 2.2, la solución general de la ecuación diferencial 2.2 es efectivamente una solución. Además, por el teorema 2.3 y la observación 2.5, un conjunto maximal de soluciones linealmente independientes de la ecuación 2.2 tiene exactamente n elementos.*

Es fácil verificar que las funciones e^x, e^{-x}, e^{2x} son soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0 \tag{2.5}$$

para todo x tal que $-\infty < x < +\infty$. Además, se puede demostrar que estas funciones son linealmente independientes en el intervalo $(-\infty, +\infty)$. Luego, según la definición 2.4 y la observación 2.7, el conjunto $\{e^x, e^{-x}, e^{2x}\}$ es el conjunto fundamental de soluciones de la ecuación 2.5 y su solución general es la función definida por $c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x}$.

Observación 2.8. *Saber que un conjunto de n funciones es linealmente independiente es de transcendental importancia, tanto para conocer cual es el conjunto fundamental de soluciones, como para determinar cual es la solución general de una ecuación diferencial.*

Los teorema 2.4 y 2.5 (ver más abajo) nos dan un criterio sencillo para averiguar cuando un conjunto de soluciones de una ecuación diferencial es linealmente independiente en un intervalo $[a, b]$. Primero necesitamos dar la siguiente definición.

Definición 2.5. *Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n$, n funciones reales que tienen derivadas hasta de orden $n-1$ en un intervalo real $[a, b]$. El determinante*

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ f_1' & f_2' & \ldots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \ldots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

se llama Wronskiano de estas n funciones.

Observamos que el Wronskiano de $f_1, f_2, \ldots, f_n$ es una función real en el intervalo $[a, b]$, su valor lo denotamos por $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x)$.

Ejemplo 2.4. *Hallar el Wronskiano de las funciones definidas por $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{-x}$ y $f_3(x) = e^{2x}$.*

Solución. Desde la definición 2.5 tenemos

$$W(e^x, e^{-x}, e^{2x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix},$$

luego $W(e^x, e^{-x}, e^{2x})(x) = -6e^{2x}$.

Ejemplo 2.5. *Hallar el Wronskiano de las funciones definidas por $f_1(x) = \operatorname{sen} x$ y $f_2(x) = 2 \operatorname{sen} x$.*

Solución. En este caso tenemos

$$W(\operatorname{sen} x, 2 \operatorname{sen} x) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & 2 \operatorname{sen} x \\ \cos x & 2 \cos x \end{vmatrix},$$

luego $W(\operatorname{sen} x, 2 \operatorname{sen})(x) = 0$.

Los siguientes teoremas nos permiten averiguar si un conjunto de soluciones de una ecuación diferencial de n-ésimo orden es linealmente independiente en un intervalo.

Teorema 2.4. *Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n$ soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden 2.2. Las soluciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son linealmente independientes en el intervalo $[a, b]$ si y solo si $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x)$ es diferente de cero para algún x en $[a, b]$.*

Teorema 2.5. *El Wronskiano de n soluciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ de la ecuación diferencial 2.2 es, o bien identicamente igual a cero en $[a, b]$ o bien diferente de cero en $[a, b]$.*

Observación 2.9. *Los teoremas 2.4 y 2.5 no tienen validez (al menos en todos los casos) cuando se elimina la hipótesis que pide que las funciones sean soluciones de la ecuación diferencial.*

Para una discución general de la relación entre dependencia lineal de un conjunto de funciones y el Wronskiano asociado a esas funciones ver, por ejemplo, Bôcher [BM] o Courant [CR, pag. 756–763].

Ejemplo 2.6. *Decir si las funciones definidas por* $f_1(x) = \operatorname{sen} x$ *y* $f_2(x) = 2\operatorname{sen} x$ *forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación* $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$.

Solución. Primero vemos que las funciones f_1 y f_2 son soluciones de la ecuación diferencial. En efecto:

$f_1(x)$	$f_1'(x)$	$f_1''(x)$	$f_2(x)$	$f_2'(x)$	$f_2''(x)$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	$2\operatorname{sen} x$	$2\cos x$	$-2\operatorname{sen} x$

Reemplazando estos valores, vemos claramente que f_1 y f_2 son soluciones de la ecuación diferencial. En el Ejemplo 2.5, se vio que $W(\operatorname{sen} x, 2\operatorname{sen} x)(x) = 0$. Luego, por el teorema 2.4 y el teorema 2.5, estas funciones son linealmente dependientes. Por lo tanto, no constituyen un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$.

Ejemplo 2.7. *Conociendo que las funciones* $\operatorname{sen} x$ *y* $\cos x$ *son soluciones de la ecuación diferencial* $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$. *Hallar la solución general de la ecuación diferencial.*

Solución. El Wronskiano de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ es

$$\begin{aligned} W(\cos x, \operatorname{sen} x) &= \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} \\ &= -\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x \\ &= -1. \end{aligned}$$

Luego, por los teoremas 2.4 y 2.5 se tiene que $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ son linealmente independientes en todos los reales. Luego (ver observación 2.7) el conjunto $\{\operatorname{sen} x, \cos x\}$ es el conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial

$\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ y su solución general es la función definida por $f(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$. Además, el intervalo solución es $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.8. *Hallar la solución general de la ecuación*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

Solución. Derivando, se demuestra que las funciones e^x, e^{-x} y e^{2x} son soluciones de la ecuación diferencial. Como $W(e^x, e^{-x}, e^{2x})(x) = -6e^{2x} \neq 0$ para todo x real. Tenemos que e^x, e^{-x} y e^{2x} son funciones linealmente independientes para todo x tal que $-\infty < x < +\infty$. Luego, la solución general de la ecuación de este ejemplo está definida por

$$f(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x}.$$

Reducción de orden

Reducir el orden de una ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden es una técnica que facilita mucho el trabajo de hallar soluciones de una ecuación diferencial. Su aplicación depende del conocimiento de una solución no trivial de la ecuación.

El próximo teorema nos indica c'omo podemos reducir el orden de una ecuación diferencial.

Teorema 2.6. *Si f es una solución no trivial de la ecuación lineal homogénea de n-ésimo orden 2.2, entonces la transformación $y = fv$ reduce la ecuación 2.2 a una ecuación diferencial lineal homogénea de $(n-1)$-ésimo orden en la variable $w = \dfrac{dv}{dx}$. Además, la función definida como $f(x)v(x)$ también es solución de la ecuación 2.2.*

Para ejemplificar la utilidad del teorema 2.6, realizamos un estudio completo de la ecuación de segundo orden.

Sea f una solución no trivial de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + +a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} = 0. \tag{2.6}$$

Utilizamos la transformación

$$y = fv. \tag{2.7}$$

El objetivo es determinar la función v. Diferenciando obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = f\frac{dv}{dx} + v\frac{df}{dx},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{df}{dx}\frac{dv}{dx} + v\frac{df^2}{dx^2}.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación 2.6 obtenemos

$$a_0(x)fv + a_1(x)\left(f\frac{dv}{dx} + v\frac{df}{dx}\right) + a_2(x)\left(f\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{df}{dx}\frac{dv}{dx} + v\frac{df^2}{dx^2}\right) = 0.$$

Ya que f es una solución de la Ecuación 2.6, la última ecuación se reduce a la ecuación

$$a_2(x)f(x)\frac{d^2v}{dx^2} + \left(a_1(x)f(x) + 2a_2(x)\frac{df}{dx}\right)\frac{dv}{dx} = 0.$$

Si ponemos $w = \dfrac{dv}{dx}$, entonces la última ecuación se puede escribir como

$$a_2(x)f(x)\frac{dw}{dx} + \left(a_1(x)f(x) + 2a_2(x)\frac{df}{dx}\right)w = 0. \tag{2.8}$$

La ecuación 2.8 es una ecuación diferencial en variables separables cuya solución es

$$w = \frac{ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}}{(f(x))^2}.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos hacer $c = 1$. Luego se tiene que

$$v = \int\left(\frac{e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}}{(f(x))^2}\right)dx.$$

Finalmente, una solución de la ecuación diferencial 2.6 está dada por

$$y = f(x)\int\left(\frac{e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}}{(f(x))^2}\right)dx. \tag{2.9}$$

Observación 2.10. *Se puede demostrar (hacerlo) que* $W(f,g) \neq 0$*, donde* f *es una solución no trivial de la ecuación 2.6 y* $g = f(x)\displaystyle\int\left(\frac{e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}}{(f(x))^2}\right)dx$*. Por tanto, la solución general de la ecuación lineal homogénea de segundo orden esta dada por* $c_1f + c_2g$*.*

Ejemplo 2.9. *Se puede comprobar fácilmente que la función definida por* $f(x) = e^x$ *es solución de la ecuación diferencial* $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = 0$*. Hallar una solución que sea linealmente independiente con la solución* f*.*

Solución. Según la observación 2.10, reemplazando los valores de las funciones a_1, a_2 y f en la ecuación 2.9, una solución de la ecuación diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ que es linealmente independiente con la función definida por $f(x) = e^x$ está dada por $g(x) = e^x \displaystyle\int e^{-2x}dx$. Luego $g(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-x}$.

Ejemplo 2.10. *Se sabe que la función definida por* $f(x) = x^2$ *es solución de la ecuación* $x^2\dfrac{d^2y}{d}x^2 - 3x\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$*. Hallar otra solución de la ecuación diferencial.*

Solución. En este caso se tiene

$$\begin{aligned}\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx &= \int -\frac{3}{x}dx \\ &= -3\ln x.\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}}{(f(x))^2}\right)dx &= \int \frac{x^3}{x^4}dx \\ &= \int \frac{1}{x}dx \\ &= \ln x.\end{aligned}$$

De esta forma, una solución de la ecuación deferencial $x^2\dfrac{d^2y}{d}x^2 - 3x\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$ es la función definida por $g(x) = x^2\ln x$.

La ecuación lineal no homogénea de n-ésimo orden

Para terminar esta sección enunciamos algunos resultados básicos sobre la ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden no homogénea o completa

$$a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + \ldots + a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} = F(x). \tag{2.10}$$

El resultado básico es el teorema que relaciona la solución de la ecuación completa y su correspondiente ecuación homogénea asociada. Primero definimos el concepto de ecuación homógenea asociada.

Definición 2.6. *Se llama ecuación homogénea asociada a la ecuación 2.10 a la siguiente ecuación:*

$$a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + \ldots + a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} = 0. \tag{2.11}$$

Ahora enunciamos el teorema que relaciona la solución de la ecuación 2.10 con la solución de la ecuación 2.11.

Teorema 2.7. *Si f, g son soluciones arbitrarias de las ecuaciones 2.10 y 2.11 respectivamente, entonces la función $f+g$ es solución de la ecuación 2.10.*

En efecto, calculando las derivadas hasta el orden n de la función $f+g$ se tiene que

$$\begin{aligned} a_0(x)(f+g) + a_1(x)\frac{d(f+g)}{dx} + \ldots + a_n(x)\frac{d^n(f+g)}{dx^n} &= F(x) + 0 \\ &= F(x). \end{aligned}$$

Por ejemplo, la función definida como $f(x) = x$ es solución de la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} + y = x$ (comprobarlo) y la función dada por $g(x) = \operatorname{sen} x$ es una solución de la ecuación homogénea asociada $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ (comprobarlo). Luego, por el teorema 2.7, la función definida por $x + \operatorname{sen} x$ es solución de la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} + y = x$.

Ahora, aplicando el teorema 2.7 al caso especial de tener una solución sin parámetros de la ecuación completa y la solución general de su ecuación homogénea asociada tenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.2. *Si y_p es una solución particular de la ecuación 2.10, y_c es la solución general de la ecuación 2.11, entonces cualquier solución φ de la ecuación 2.10 está dada por $\varphi = y_p + y_c$.*

El corolario 2.2 sugiere la siguiente definición:

Definición 2.7. *Consideremos la ecuación diferencial no homogénea (ver ecuación 2.10) y su ecuación diferencial homogénea asociada (ver ecuación 2.11).*

1. *La solución general de la ecuación homogénea asociada se llama función complementaria de la ecuación no homogénea. A esta solución la notaremos por y_c.*

2. *Cualquier solución de la ecuación no homogénea que no contenga parámetros se llama integral particular de la ecuación no homogénea. A esta solución la notaremos con* y_p.

3. *La solución* $y_c + y_p$*, donde* y_c *es la función complementaria,* y_p *es una integral particular de de la ecuación no homogénea, se llama solución general de la ecuación no homogénea.*

Ejemplo 2.11. *Hallar la solución general de la ecuación* $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = x$.

Solución. La función $y_p = x$ es una integral particular de la ecuación. Además, la función $y_c = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$ es la función complementaria de la ecuación diferencial, luego $x + c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$ es la solución general de la ecuación diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = x$.

2.2 Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

Hallar la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden con coeficientes variables es una tarea muy complicada de realizar y, en la mayoría de los casos es simplemente imposible hallar tal solución. Sin embargo, si la ecuación tiene coeficientes constantes la tarea se vuelve bastante fácil.

En efecto, sea $a_0 y + a_1 \dfrac{dy}{dx} + \ldots + a_n \dfrac{d^n y}{dx^n} = 0$, donde $a_n \neq 0$ una ecuación diferencial homogénea de n-ésimo orden con coeficientes constantes. Mirando la ecuación diferencial nos damos cuenta de que una solución de esta, se podría pensar, es una función f que tiene la siguiente propiedad: "f y sus derivadas son múltiplos de sí mismo". Ahora, ¿conocemos alguna función que cumpla esta propiedad? La respuesta es **SÍ**, la función exponencial e^{mx}, donde m es una constante, es tal que $\dfrac{d^k(e^{mx})}{dx^k} = m^k e^{mx}$. De esta forma podríamos decir que la solución de la ecuación diferencial homogénea de n-ésimo orden con coeficientes constantes tiene la forma $y = e^{mx}$ donde la constante m se debe escoger de tal forma que se satisfaga la ecuación.

Ya que

$$f(x) = e^{mx},$$
$$\frac{df(x)}{dx} = me^{mx},$$
$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = m^2e^{mx},$$
$$\vdots$$
$$\frac{d^nf(x)}{dx^n} = m^ne^{mx}.$$

Reemplazando estos valores en la ecuación diferencial se tiene que

$$a_0e^{mx} + a_1me^{mx} + a_2m^2e^{mx} + \ldots + a_nm^ne^{mx} = 0$$

o

$$e^{mx}(a_0 + a_1m + a_2m^2 + \ldots + a_nm^n) = 0.$$

Como $e^{mx} \neq 0$ para todo valor de x se tiene, desde la última expresión, que

$$a_0 + a_1m + a_2m^2 + \ldots + a_nm^n = 0. \tag{2.12}$$

Podemos concluir que: si la solución de la ecuación diferencial homogenéa de n-ésimo orden con coeficientes constantes tiene la forma $f(x) = e^{mx}$, entonces la constante m debe satisfacer la Ecuación 2.12.

El objetivo de esta sección es presentar un método explícito para hallar la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden con coeficientes constantes:

$$a_0y + a_1\frac{dy}{dx} + \ldots + a_n\frac{d^ny}{dx^n} = 0, \quad a_n \neq 0. \tag{2.13}$$

El método que vamos a exponer está fundamentado por lo expuesto al inicio de esta sección. Antes de exponer el método, necesitamos dar la siguiente difinición:

Definición 2.8. *Se llama ecuación característica asociada a la ecuación 2.13 a la siguiente ecuación algebraica:*

$$a_0 + a_1m + a_2m^2 + \ldots + a_nm^n = 0. \tag{2.14}$$

Notamos que la potencia de la variable m en la ecuación característica 2.14 está determinada por el orden de la derivada de y en la ecuación diferencial 2.13, donde la derivada de orden cero de y coincide con la función y.

Ejemplo 2.12. *La ecuación diferencial* $2y - 5\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{d^3y}{dx^3} = 0$ *tiene ecuación característica asociada* $2 - 5m - m^3 = 0$.

Existe una correspondencia unívoca entre las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y las ecuaciones algebraicas. De esta forma, a cada ecuación diferencial de la forma 2.13 le corresponde una ecuación algebraica de la forma 2.14 y viceversa, a cada ecuación algebraica de la forma 2.14 le corresponde una ecuación diferencial de la forma 2.13.

Ejemplo 2.13. *Hallar la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes asociada a la ecuación algebraica* $3 - 5m^2 + 2m^3 + 4m^5 = 0$.

Solución. Lo único que se tiene que hacer es reemplazar la potencia de m por el orden de la derivada de la ecuación diferencial, recordando que la potencia "0" de m corresponde a la derivada de orden cero en la ecuación diferencial. Así, la ecuación diferencial que buscamos es $3y - 5\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{d^3y}{dx^3} + 4\dfrac{d^5y}{dx^5} = 0$.

Se puede demostrar que: la forma de las soluciones de la ecuación diferencial homogénea 2.13 dependen de la naturaleza de las soluciones de su ecuación característica asociada 2.14.

Ya que una ecuación algebraica de n-ésimo grado tiene exactamente n raíces y el conjunto fundamental de soluciones de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes tiene exactamente n elementos, podemos concluir que existe una solución fundamental de la ecuación 2.13 por cada raíz de la ecuación 2.14. Además, las raíces de cualquier ecuación algebraica pueden ser:

a. reales simples,

b. reales multiples,

c. complejas simples y,

d. complejas multiples.

Así, se tiene cuatro casos, dependiendo de que tipo de solución se tenga para la ecuación característica asociada 2.14.

Caso raíces reales simples

Si m_i es una raíz real simple de la ecuación característica asociada

$$a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + \ldots + a_n m^n = 0,$$

entonces la función definida por e^{m_i} es una solución de la ecuación diferencial

$$a_0 y + a_1 \frac{dy}{dx} + \ldots + a_n \frac{d^n y}{dx^n} = 0.$$

Observación 2.11. *Si m_i, m_j son raíces reales simples y diferentes (para $i \neq j$) de la ecuación característica asociada, entonces las funciones definidas por e^{m_i}, e^{m_j} son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial.*

Cuando la ecuación característica asociada tiene n raíces reales simples, digamos $m_1, m_2, \ldots, m_n$, la solución general de la ecuaión diferencial homogénea 2.13 está dada por:

$$y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \ldots + c_n e^{m_n x},$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias.

Ejemplo 2.14. *Hallar la solución general de la siguiente ecuación diferencial:*

$$6\frac{d^4 y}{dx^4} - 13\frac{d^3 y}{dx^3} - 29\frac{d^2 y}{dx^2} + 52\frac{dy}{dx} + 20y = 0.$$

Solución. La ecuación característica asociada a esta ecuación diferencial homogénea es:

$$6m^4 - 13m^3 - 29m^2 + 52m + 20 = 0.$$

Las raíces de la ecuación característica asociada son $m = 2$, $m = -2$, $m = -\frac{1}{3}$ y $m = \frac{5}{2}$ (hacer los cálculos). Luego, las soluciones fundamentales de la ecuación diferencial son e^{2x}, e^{-2x}, $e^{-\frac{1}{3}x}$ y $e^{\frac{5}{2}x}$. Así, la solución general requerida es:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-\frac{1}{3}x} + c_4 e^{\frac{5}{2}x}.$$

Ejemplo 2.15. *Hallar la solución general de la ecuación*

$$15\frac{d^4 y}{dx^4} - 67\frac{d^3 y}{dx^3} + 51\frac{d^2 y}{dx^2} + 43\frac{dy}{dx} + 6y = 0.$$

Solución. La ecuación $15m^4-67m^3+51m^2+43m+6=0$ es la ecuación característica asociada a la ecuaión diferencial. Ya que $m=2$, $m=3$, $m=-\frac{1}{3}$ y $m=-\frac{1}{5}$ son las soluciones de la ecuación asociada, se tiene que las soluciones fundamentales de la ecuación diferencial son e^{2x}, e^{3x}, $e^{-\frac{1}{3}x}$ y $e^{-\frac{1}{5}x}$. Luego, la solución general de la ecuación diferencial está dada por

$$y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+c_3e^{-\frac{1}{3}x}+c_4e^{-\frac{1}{5}x}.$$

Caso raíces reales multiples

Si m_j es una raíz real con multiplicidad α de la ecuación característica asociada 2.14, entonces $e^{m_jx}, xe^{m_jx}, \ldots, x^{\alpha-1}e^{m_jx}$ son α soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial 2.13.

Ejemplo 2.16. *Hallar la solución general de la siguiente ecuación diferencial:*

$$\frac{d^5y}{dx^5}-2\frac{d^4y}{dx^4}-6\frac{d^3y}{dx^3}+20\frac{d^2y}{dx^2}-19\frac{dy}{dx}+6y=0.$$

Solución. La ecuación característica asociada a la ecuaión diferencial es:

$$m^5-2m^4-6m^3+20m^2-19m+6=0.$$

Las raíces de esta ecuación son $m=2$, $m=-3$ y $m=1$ donde las dos primeras soluciones son simples (sin multiplicidad) y la tercera solución tiene multiplicidad 3 (hacer los cálculos).

Según el caso de raíces reales simples, se tiene que las funciones definidas por e^{2x} y e^{-3x} son soluciones de la ecuación diferencial. Por otro lado, según el caso de soluciones reales múltiples se tiene que las funciones dadas por e^x, xe^2 y x^2e^x son las tres soluciones asociadas a la solución múltiple $m=1$. Luego la solución general de la ecuación diferencial está dada por:

$$y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-3x}-c_3e^x+c_4xe^x+c_5x^2e^x.$$

Ejemplo 2.17. *Hallar la solución general de la ecuación*

$$4\frac{d^5y}{dx^5}-20\frac{d^4y}{dx^4}+37\frac{d^3y}{dx^3}-30\frac{d^2y}{dx^2}+9\frac{dy}{dx}=0.$$

Solución. La ecuación característica asociada a la ecuación diferencial es

$$4m^5 - 20m^4 + 37m^3 - 30m^2 + 9m = 0.$$

Las raíces de esta ecuación son $m = 0$, $m = \dfrac{3}{2}$ y $m = 1$ donde, la primera solución es simple y las dos últimas soluciones tienen multiplicidad 2 cada una (realizar los cálculos). Luego, la solución general de la ecuación diferencial está dada por la función definida como

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{\frac{3}{2}x} + c_3 x e^{\frac{3}{2}x} + c_4 e^x + c_5 x e^x.$$

Caso raíces complejas

Si $m_j = \alpha + \beta i$ es un a raíz compleja simple de la ecuación característica asociada 2.14, entonces las funciones definidas por $e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$, $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial 2.13.

Observación 2.12. *Si $m_j = \alpha + \beta i$ es solución de la ecuación característica asociada, entonces $\overline{m_j} = \alpha - \beta i$ también es solución de la ecuación caracteréstica. Esta solución $\overline{m_j}$ no genera nuevas soluciones linealmente independientes (¿por qué?), luego es suficiente tomar en cuenta la solución m_j para construir la solución general de la ecuación diferencial 2.13.*

Ejemplo 2.18. *Hallar la solución general de la ecuación diferencial:*

$$\frac{d^5y}{dx^5} - 5\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^3y}{dx^3} - 15\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 20y = 0.$$

Solución. La ecuación característica asociada a esta ecuación diferencial es:

$$m^5 - 5m^4 + 3m^3 - 15m^2 - 4m + 20 = 0.$$

Las raíces de esta ecuación algebraica son $m = 1$, $m = 2 + i$, $m = 2 - i$, $m = 2i$, $m = -2i$ (comprobarlo). Además, todas las raíces son simples.

Las funciones e^x (asociada a la raíz $m = 1$), $e^{2x}\operatorname{sen} x$, $e^{2x}\cos x$ (asociadas a la raíz $m = 2 + i$), $\operatorname{sen}(2x)$, $\cos(2x)$ (asociadas a la raíz $m = 2i$) son las soluciones

linealmente independientes de la ecuación diferencial. Así, la solución general de la ecuación diferencial está dada por:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \operatorname{sen} x + c_3 e^{2x} \cos x + c_4 \operatorname{sen}(2x) + c_5 \cos(2x).$$

Ejemplo 2.19. *Hallar la solución general de la ecuación diferencial:*

$$\frac{d^5y}{dx^5} - \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

Solución. La ecuación característica asociada a esta ecuación diferencial es:

$$m^5 - m^3 - m^2 + 1 = 0.$$

Las raíces de esta ecuación algebraica son $m = 1$, $m = -1$, $m = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $m = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (comprobarlo). La primer raíz tiene multiplicidad 2 y las restantes raíces son simples.

Las funciones

- e^x, xe^x asociadas a la raíz multiple $m = 1$,
- e^{-x} asociada la la raíz simple $m = -1$,
- $e^{-\frac{1}{2}x} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$, $e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ asociadas a la raíz compleja $m = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

son las soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial. Así, la solución general de la ecuación diferencial está dada por:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x} + c_4 e^{-\frac{1}{2}x} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_5 e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Caso raíces complejas múltiples

Si $m_j = \alpha + \beta i$ es una raíz compleja con multiplicidad γ de la ecuación característica asociada 2.14, entonces las 2γ funciones definidas como $e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$, $e^{\alpha x} \cos(\beta x)$, $xe^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$, $xe^{\alpha x} \cos(\beta x), \ldots, x^{\gamma-1} \operatorname{sen}(\beta x)$, $x^{\gamma-1} \cos(\beta x)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial 2.13.

Observación 2.13. *Si la ecuación característica asociada tiene una raíz compleja $m_j = \alpha + \beta i$ con multiplicidad γ, entonces los γ números complejos $\overline{m_j} = \alpha - \beta i$ también son raíces de la ecuación característica asociada. Estas soluciones no generan nuevas soluciones linealmente independientes (ver observación 2.12), por tanto, es suficiente tomar en cuenta las soluciones m_j.*

Ejemplo 2.20. *Hallar la solución general de la ecuación diferencial:*

$$\frac{d^6y}{dx^6} - 10\frac{d^5y}{dx^5} + 59\frac{d^4y}{dx^4} - 196\frac{d^3y}{dx^3} + 419\frac{d^2y}{dx^2} - 442\frac{dy}{dx} + 169y = 0.$$

Solución. La ecuación característica asociada es:

$$m^6 - 10m^5 + 59m^4 - 196m^3 + 419m^2 - 442m + 169 = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación son $m = 1$, $m = 2 + 3i$ y $m = 2 - 3i$ todas con multiplicidad 2 (verificarlo). Por un lado, las funciones definidas por e^x, xe^x son soluciones linealmente independientes asociadas a la solución real multiple $m = 1$. Por otro lado, las funciones $e^{2x}\operatorname{sen}(3x)$, $e^{2x}\cos(3x)$, $xe^{2x}\operatorname{sen}(3x)$ y $xe^{2x}\cos(3x)$ son las 4 soluciones linealmente independientes asociadas a la raíz compleja múltiple $m = 2 + 3i$ (la raíz $m = 2 - 3i$ no se toma en cuenta – ver observación 2.12).

De esta forma, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{2x\operatorname{sen}(3x} + c_4e^{2x}\cos(3x) + c_5xe^{2x\operatorname{sen}(3x} + c_6xe^{2x}\cos(3x).$$

Ejemplo 2.21. *Hallar la solución general de la siguiente ecuación diferencial*

$$4\frac{d^4y}{dx^4} + 4\frac{d^3y}{dx^3} + 13\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0.$$

Solución. La ecuación característica asociada es $4m^4 + 4m^3 + 13m^2 + 6m + 9 = 0$. Las soluciones de esta ecuación son $m = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4}i$ y $m = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{23}}{4}i$ cada una con multiplicidad 2. Así, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = c_1e^{-\frac{1}{4}x}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{23}}{4}x\right) + c_2xe^{-\frac{1}{4}x}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{23}}{4}x\right) +$$
$$c_3e^{-\frac{1}{4}x}\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{4}x\right) + c_4xe^{-\frac{1}{4}x}\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{4}x\right)$$

Ejercicios

En los siguientes ejercicios hallar la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes cuyo polinomio característico asociados tiene las siguientes raíces:

1. $\lambda_1 = 2$ raíz simple, $\lambda_2 = -3$ raíz con multiplicidad 3, $\lambda_3 = 2 + 3i$ raíz simple, $\lambda_4 = 2 - 3i$.
2. $\lambda_1 = 2/5$ raíz simple, $\lambda_2 = -1$ raíz simple, $\lambda_3 = 0$ raíz con multiplicidad $2, \lambda_4 = -3/4$ raíz simple, $\lambda_5 = 1 + 2i$ raíz simple, $\lambda_6 = 1 - 2i$.
3. $\lambda = 1$ raíz con multiplicidad 5.
4. $\lambda_1 = 3 + 2i$ raíz con multiplicidad 2, $\lambda_1 = 3 - 2i$ raíz con multiplicidad 2.

Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones:

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} - y = 0.$
6. $2\dfrac{d^3y}{dx^3} + 5\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} = 0.$
7. $6\dfrac{d^4y}{dx^4} - 11\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} - 2y = 0.$
8. $\dfrac{d^4y}{dx^4} - y = 0.$
9. $3\dfrac{d^5y}{dx^5} - 7\dfrac{d^4y}{dx^4} + 2\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 7\dfrac{dy}{dx} - 2y = 0.$
10. $\dfrac{d^5y}{dx^5} - 2\dfrac{d^4y}{dx^4} + 2\dfrac{d^3y}{dx^3} - 4\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y = 0.$

2.3 Ecuaciones no homogéneas con coeficientes constantes

En esta sección, estudiamos dos métodos para hallar una integral particular de la ecuación no homogénea con coeficientes constantes. El primer método es bastante

fácil de aplicarlo pero no es aplicable a cualquier ecuación. El segundo método se puede aplicar a cualquier ecuación pero, en general, es más difícil que el primer método sobre todo porque este involucra la resolución de sistemas de ecuaciones e integración.

2.3.1 Método de los coeficientes indeterminados

En esta parte, estudiamos un método explícito para hallar una solución particular de la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes no homogénea

$$a_0 y + a_1 \frac{dy}{dx} + \ldots + a_n \frac{d^n y}{dx^n} = F(x), \quad a_n \neq 0. \tag{2.15}$$

El método, llamado método de los coeficientes indeterminados, desgraciadamente se puede aplicar solamente a una clase bastante restringida de funciones $F(x)$ pero tiene la ventaja (cuando se puede aplicar) de ser relativamente sencillo. Antes de explicar el método necesitamos dar la siguiente definición.

Definición 2.9. *Se llama función de tipo* CI *a cualquier función de la forma:*

1. x^n *para todo* $n \geq 0$.
2. $e^{\alpha x}$ *donde* α *es una constante diferente de cero.*
3. $\operatorname{sen}(\alpha x + \beta)$ *donde* α *y* β *son constantes y* $\alpha \neq 0$.
4. $\cos(\alpha x + \beta)$ *donde* α *y* β *son constantes y* $\alpha \neq 0$.
5. *Cualquier función que se pueda conseguir como una suma finita de productos finitos de funciones de las clases anteriores.*

Las funciones $x^3, e^{3x}, \operatorname{sen}(2x), \cos(4x)$ son ejemplos de funciones de tipo CI. Además, la función $5x^3e^{3x} + \operatorname{sen}(2x)\cos(4x) - 4e^{3x}\cos(4x)$ también es una función de tipo CI puesto que se obtiene como una suma finita de productos finitos de las funciones de tipo CI anteriores.

Observación 2.14. *Aunque una función de tipo* CI *pertenece a una clase muy restringida de funciones, esta cubre una gama bastante amplia de funciones que*

además tienen la ventaja de aparecer en muchas aplicaciones físicas. Resulta que el método de los coeficientes indeterminados se puede aplicar únicamente cuando la función $F(x)$ es una función de tipo CI.

La siguiente definición nos dice qué se entiende por conjunto asociado a una función de tipo CI.

Definición 2.10. *Sea f una función de tipo* CI. *Se llama conjunto* CI *asociado a la función f al conjunto* CI_f *formado por la función f y todas las funciones de tipo* CI *que se consiguen de f por derivación.*

Consideremos la función f definida como $f(x) = x^3$. Se tiene que f es una función de tipo CI, luego tiene sentido hallar el conjunto CI asociado a x^3. Al derivar se consiguen las funciones de tipo CI siguientes: $x^2, x, 1$. Por tanto, el conjunto CI_{x^3} es:

$$\mathrm{CI}_{x^3} = \{x^3, x^2, x, 1\}.$$

Ejemplo 2.22. *Hallar el conjunto* CI *asociado a la función f definida de la siguiente manera: $f(x) = e^{3x}\operatorname{sen} x + 7x^2 + \cos x$.*

Solución. Primero, identifiquemos las funciones de tipo CI elementales (por decirlo de alguna manera) que forman parte de la función f. Es inmediato que las funciones $e^{3x}\operatorname{sen} x$, x^2 y $\cos x$ son las funciones elementales de tipo CI que hacen parte de la función f. Derivando cada una de estas funciones se tiene:

- $e^{3x}\operatorname{sen} x$ genera la nueva función (de tipo CI) $e^{3x}\cos x$.
- x^2 genera las nuevas funciones x y 1.
- $\cos x$ genera la nueva función $\operatorname{sen} x$.

Luego el conjunto CI asociado a la función f es el siguiente conjunto:

$$\mathrm{CI}_f = \{e^{3x}\operatorname{sen} x, e^{3x}\cos x, x^2, x, 1, \cos x, \operatorname{sen} x\}.$$

El método CI

Sea

$$a_0 y + a_1 \frac{dy}{dx} + \ldots + a_n \frac{d^n y}{dx^n} = 0$$

la ecuación diferencial lineal homogénea asociada la ecuación diferencial 2.15. Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n$ las n soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada (ver Sección 2.2).

El método (algoritmo) de los coeficientes indeterminados consta de los siguientes pasos:

Paso 1. Identificamos las funciones elementales de tipo CI que forman parte de la función F (ver ecuación 2.15). Sean $g_1, g_2, \ldots, g_m$ estas funciones.

Paso 2. Calculamos los conjuntos de tipo CI asociados a cada una de las funciones g_i para $1 \leq i \leq m$. Sean $\mathrm{CI}_{g_1}, \mathrm{CI}_{g_2} \ldots, \mathrm{CI}_{g_m}$ estos conjuntos.

Paso 3. Si existen i, j, $1 \leq i, j \leq m$ tal que $\mathrm{CI}_{g_i} \subseteq \mathrm{CI}_{g_j}$, entonces eliminamos el conjunto más pequeño, es decir, eliminamos el conjunto CI_{g_i}.

Sean $\mathrm{CI}_{g_1}, \mathrm{CI}_{g_2}, \ldots, \mathrm{CI}_{g_k}$, con $k \leq m$, los conjuntos que quedan después del paso 3.

Paso 4. Si $f_i \in \mathrm{CI}_{g_t}$ para algún $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y algún $t \in \{1, 2, \ldots, k\}$, entonces multiplicamos cada elemento del conjunto CI_{g_t} por la menor potencia positiva de x de tal forma que $f_i \notin \mathrm{CI}_{g_t}$.

Paso 5. Repetimos el paso 4 hasta que $f_i \notin \mathrm{CI}_{g_t}$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y para todo $t \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Observamos que después del Paso 4 (posiblemente) algunos conjuntos CI_{g_t} habrán sido modificados. Con todos los conjuntos modificados y los que no necesitaron ser modificados pasamos al siguiente paso:

Paso 6. Ponemos y_p, la integral particular (ver definición 2.7), como una combinación lineal de todos los elementos de todos los conjuntos que quedaron después del paso 5.

Paso 7. Hallamos los valores de los coeficientes de la combinación lineal del paso 6.

Observación 2.15. *El algoritmo para hallar una integral particular y_p de la ecuación 2.15 parece demasiado artificioso y muy complicado de utilizar, pero (como cualquier procedimiento nuevo), después de practicarlo un par de ocasiones se va haciendo más natural y fácil de utilizar.*

Ejemplo 2.23. *Hallar una integral particular de la ecuación*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{d} + 2y = x^2e^x.$$

Solución. Primero hallamos las soluciones linealmente independientes de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{d} + 2y = 0.$$

Estas funciones solución están dadas por: $f_1(x) = e^x$ y $f_2(x) = e^{2x}$ (comprobarlo). Ahora pasamos al algoritmo para determinar una integral particular y_p.

El paso 1 pide identificar las funciones elementales de tipo CI que hacen parte de la función definida por x^2e^x. En este ejemplo, la única función de tipo CI es la función x^2e^x. Esto termina el paso 1.

El paso 2 pide calcular los conjuntos de tipo CI asociados a las funciones determinadas en el paso 1. Tenemos un sólo conjunto de tipo CI:

$$\mathrm{CI}_{x^2e^x} = \{x^2e^x, xe^x, e^x\}.$$

El paso 3 se omite en este ejemplo pues solo contamos con un conjunto.

El paso 4 pide modificar el conjunto $\mathrm{CI}_{x^2e^x}$ pues la solución f_1 es elemento de este conjunto. Tenemos que multiplicar cada elemento del conjunto por la menor potencia de x de tal forma que $f_1 \notin \mathrm{CI}_{x^2e^x}$. El conjunto que se obtiene de esta forma es el conjunto:

$$\overline{\mathrm{CI}}_{x^2e^x} = \{x^3e^x, x^2e^x, xe^x\}.$$

El paso 5 no necesita ser aplicado, pues ni f_1 ni f_2 son elementos del conjunto (en este caso modificado) $\overline{\text{CI}}_{x^2e^x}$.

El paso 6 nos dice que debemos poner la integral particular como una combinación lineal del único conjunto que tenemos (en este ejemplo). Así, y_p esta dada por:

$$y_p = Ax^3e^x + Bx^2e^x + Cxe^x,$$

donde A, B, C son coeficientes indeterminadas (de ahí el nombre del método) que se pide calcular en el paso 7.

Si realizamos los cálculos se tiene que

$$y_p' = (Ax^3 + (3A + B)x^2 + (2B + C)x + C)e^x.$$
$$y_p'' = (Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B + C)x + 2B + 2C)e^x.$$

Al reemplazar los valores de y_p, y_p' y y_p'' en la ecuación diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{d} + 2y = x^2e^x$ obtenemos la siguiente igualdad:

$$(-3Ax^2 + (6A - 2B)x + 2B - C)e^x = x^2e^x.$$

Para que esta igualdad se cumpla los coeficientes A, B y C deben satisfacer el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -3A = 1 \\ 6A - 2B = 0 \\ 2B - C = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema (hacerlo) se tiene $A = -1/3$, $B = -1$ y $C = -2$. Así la integral particular es:

$$y_p = \left(-\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x\right)e^x.$$

Por el teorema 2.2 y la Definición 2.7, la solución general de la ecuación diferencial es $y(x) = y_c + y_p$ donde y_c es la función complementaria y y_p es una integral particular (ver definición 2.7), esto es:

$$y(x) = \left(-\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + c_1\right)e^x + c_2e^{2x}.$$

Ejemplo 2.24. *Hallar una integral particular de la ecuación*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x}.$$

Solución. Primero hallamos las soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada. Es decir, hallamos el conjunto fundamental de soluciones de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0.$$

Aplicando el método estudiado en la sección 2.2, vemos que el conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea está formado por las funciones definidas por: $f_1(x) = e^x$ y $f_2(x) = e^{3x}$ (hacer las cuentas). Ahora pasamos al algoritmo para determinar una integral particular y_p.

El paso 1 pide identificar las funciones elementales de tipo CI que hacen parte de la función definida por $2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x}$. En este ejemplo, las funciones elementales de tipo CI son x^2, e^x, xe^x y e^{3x}. Esto termina el paso 1.

El paso 2 pide calcular los conjuntos de tipo CI asociados a las funciones determinadas en el paso 1. Tenemos cuatro conjuntos de tipo CI:

$$\begin{aligned}\mathrm{CI}_{x^2} &= \{x^2, x, 1\},\\ \mathrm{CI}_{e^x} &= \{e^x\},\\ \mathrm{CI}_{xe^x} &= \{xe^x, e^x\},\\ \mathrm{CI}_{e^{3x}} &= \{e^{3x}\}.\end{aligned}$$

El paso 3 pide eliminar los conjuntos más pequeños. En este caso, eliminamos el conjunto CI_{e^x}.

El paso 4 pide modificar los conjuntos que tienen algún elemento coincidente con alguna de las soluciones fundamentales de la ecuación homogénea asociada. En nuestro caso tenemos que modificar los conjuntos CI_{xe^x} y $\mathrm{CI}_{e^{3x}}$ pues $f_1 \in \mathrm{CI}_{xe^x}$ y $f_2 \in \mathrm{CI}_{e^{3x}}$. Tenemos que multiplicar cada elemento de los conjuntos CI_{xe^x} y $\mathrm{CI}_{e^{3x}}$ por la menor potencia de x de tal forma que $f_1 \notin \mathrm{CI}_{xe^x}$ y $f_2 \notin \mathrm{CI}_{e^{3x}}$. Los conjuntos

que se obtienen de esta forma son los conjuntos:

$$\overline{\text{CI}}_{xe^x} = \{x^2e^x, xe^x\},$$
$$\overline{\text{CI}}_{e^{3x}} = \{xe^{3x}\}.$$

El paso 5 no necesita ser aplicado pues ni f_1 ni f_2 son elementos de los conjuntos (algunos modificados en este caso) CI_{x^2}, $\overline{\text{CI}}_{xe^x}$ y $\overline{\text{CI}}_{e^{3x}}$.

El paso 6 nos dice que debemos poner la integral particular como una combinación lineal de los conjuntos que obtuvimos en el paso 5. Así, y_p esta dada por:

$$y_p = A_1x^2 + A_2x + A_3 + A_4x^2e^x + A_5xe^x + A_6xe^{3x},$$

donde A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 y A_6 son coeficientes indeterminados que se pide calcular en el paso 7.

Si realizamos los cálculos se tiene que

$$y_p' = 2A_1x + A_2 + A_4x^2e^x + (2A_4 + A_5)xe^x + A_5e^x + 3A_6xe^{3x} + A_6e^{3x}.$$
$$y_p'' = 2A_1 + A_4x^2e^x + (4A_4 + A_5)xe^x + (2A_4 + 2A_5)e^x + 9A_6xe^{3x} + 6A_6e^{3x}.$$

Al reemplazar los valores de y_p, y_p' y y_p'' en la ecuación diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 3y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x}$ obtenemos el siguente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3A_1 = 2 \\ -8A_1 + 3A_2 = 0 \\ 2A_1 - 4A_2 + 3A_3 = 0 \\ -4A_4 = 2 \\ 2A_4 - 2A_5 = 1 \\ 2A_6 = 4 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema (hacerlo) se tiene $A_1 = 2/3$, $A_2 = 16/9$, $A_3 = 52/27$, $A_4 = -1/2$, $A_5 = -1$ y $A_6 = 2$. Así la integral particular es:

$$y_p = \frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{9}x + \frac{52}{27} - \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)e^x + 2xe^{3x}.$$

Por el teorema 2.2 y la definición 2.7, la solución general de la ecuación diferencial es $y(x) = y_c + y_p$ donde y_c es la función complementaria y y_p es una integral particular. Así:

$$y(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{9}x + \frac{52}{27} - \left(\frac{1}{2}x^2 + x - c_1\right)e^x + (2x + c_2)e^{3x}$$

Ejercicios

Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones:

1. $3\dfrac{d^3y}{dx^3} + 3\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - y = x \operatorname{sen} x + 4x^2e^x.$
2. $2\dfrac{d^4y}{dx^4} - \dfrac{d^3y}{dx^3} - 4\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 6y = xe^{2x} - 3x^3.$
3. $\dfrac{d^4y}{dx^4} + \dfrac{d^3y}{dx^3} - 7\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} + 6y = e^x + xe^{-x} + 2e^{2x} + 5.$
4. $-12\dfrac{d^5y}{dx^5} + 35\dfrac{d^4y}{dx^4} - 59\dfrac{d^3y}{dx^3} + 327\dfrac{d^2y}{dx^2} + 441\dfrac{dy}{dx} + 108y = \operatorname{sen}(3x) + 2x\cos(3x) - xe^{4x}.$
5. $\dfrac{d^6y}{dx^6} - \dfrac{d^4y}{dx^4} - \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{sen} x + 2\cos x - 3xe^x + 4x^2e^{-x}.$
6. $2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + y = x^2 + x - 1.$

2.3.2 Método de variación de parámetros

En la subsección 2.3.1, estudiamos el método de coeficientes indeterminados, el cual involucra únicamente derivación y técnicas de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Se indicó también que el método CI se aplica únicamente al caso de funciones de tipo CI. Por ejemplo, el método CI no se aplica a la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \tan x.$$

En esta sección estudiamos un método más general para hallar una integral particular de una ecuación diferencial de n-ésimo orden que además, tiene la ventaja de aplicarse a ecuaciones lineales con coeficientes variables.

Primero explicamos el método de variación de parámentros al caso particular de una ecuación de segundo orden y posteriormente lo generalizamos al caso de ecuaciones de orden $n \geq 3$.

Consideremos la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} = F(x). \tag{2.16}$$

Sean y_1, y_2 dos soluciones linelmente independientes de la correspondiente ecuación homogénea asociada

$$a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} = 0. \tag{2.17}$$

La función complementaria de la ecuación 2.16 está dada por

$$y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias.

El método de variación de parámetros asegura que una integral particular de la ecuación 2.16 tiene la forma

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x).$$

Observación 2.16. *Vemos que el método de variación de parámetros supone que una integral particular se puede conseguir haciendo variar los parámetros (de ahí el nombre)* c_1 *y* c_2 *de la función complementaria.*

Para hallar las funciones $c_1(x)$ y $c_2(x)$ procedemos de la siguiente manera:

Derivamos la función y_p:

$$y_p'(x) = y_1(x)c_1'(x) + c_1(x)y_1'(x) + y_2(x)c_2'(x) + c_2(x)y_2'(x). \tag{2.18}$$

Ahora exigimos que

$$y_1(x)c_1'(x) + y_2(x)c_2'(x) = 0. \tag{2.19}$$

Con esta suposición, la ecuación 2.18 toma la forma

$$y_p'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x). \tag{2.20}$$

Derivamos la ecuación 2.20:

$$y_p''(x) = c_1'(x)y_1'(x) + c_1(c)y_1''(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_2(x)y_2''(x).$$

Reemplazamos estos valores en la ecuación 2.16:

$$a_0(x)[c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)] + a_1(x)[c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)]+$$
$$a_2(x)[c_1'(x)y_1'(x) + c_1(c)y_1''(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_2(x)y_2''(x)] = F(x)$$

Reagrupando términos tenemos:

$$c_1(x)[a_0(x)y_1(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1''(x)]+$$
$$c_2(x)[a_0(x)y_2(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_2(x)y_2''(x)]+$$
$$a_2(x)[y_1'(x)c_1'(x) + y_2'(x)c_2'(x)] = F(x)$$

Ya que y_1, y_2 son soluciones de la ecuación 2.17, la última ecuación se reduce a la ecuación:

$$y_1'(x)c_1'(x) + y_2'(x)c_2'(x) = \frac{F(x)}{a_2(x)}. \tag{2.21}$$

Las ecuaciones 2.19 y 2.21 forma el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y_1(x)c_1'(x) + y_2(x)c_2'(x) = 0 \\ y_1'(x)c_1'(x) + y_2'(x)c_2'(x) = \dfrac{F(x)}{a_2(x)}, \end{cases} \tag{2.22}$$

donde las incognitas son las funciones c_1' y c_2'.

Observación 2.17. *Puesto que $a_2(x) \neq 0$, la ecuación 2.21 está bien planteada. Luego, tiene sentido preguntarnos sobre la solución del sistema 2.22.*

Puesto que el wronskiano $W(y_1, y_2)$ de y_1, y_2 es diferente de cero (ver definición 2.5 y teoremas 2.4), este sistema tiene solución única y esta viene dada por:

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ \dfrac{F(x)}{a_2(x)} & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{y_2(x)F(x)}{a_2(x)W(y_1, y_2)},$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & \dfrac{F(x)}{a_2(x)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{y_1(x)F(x)}{a_2(x)W(y_1, y_2)}.$$

Así, las funciones c_1 y c_2 están dadas por:

$$c_1(x) = \int \frac{y_2(x)F(x)}{a_2(x)W(y_1, y_2)}dx, \qquad c_2(x) = \int \frac{y_1(x)F(x)}{a_2(x)W(y_1, y_2)}dx.$$

Ejemplo 2.25. *Hallar una integral particular de la siguiente ecuación:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \tan x.$$

Solución. Primero hallamos las soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada. Realizando los cálculos (hecerlo) se tiene que $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \operatorname{sen} x$ son las soluciones buscadas. Ahora pedimos que una integral particular de la ecuación no homogénea tenga la forma $y_p(x) = c_1(x)\cos x + c_2(x)\operatorname{sen} x$. A partir de este punto podríamos repetir los pasos que se hizo para hallar los valores de las funciones c_1 y c_2 sin embargo, vamos a utilizar el último resultado de los cálculos anteriores pues este nos da una fórmula explícita para las funciones c_1 y c_2.

El wronskiano de las funciones $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ es:

$$W(\operatorname{sen} x, \cos x) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} = -1.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} c_1(x) = \int \frac{y_2(x)F(x)}{a_2(x)W(y_1, y_2)}dx &= -\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}dx \\ &= -\int (\sec x - \cos x)dx \\ &= -\ln(\sec x + \tan x) + \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2(x) = \int \frac{y_1(x)F(x)}{a_2(x)W(y_1, y_2)}dx &= -\int \operatorname{sen} x dx \\ &= \cos x. \end{aligned}$$

De esta forma tenemos que una integral particular es:

$$y_p(x) = -\cos x \ln(\sec x + \tan x) + \operatorname{sen}(2x).$$

Observación 2.18. *La solución general de la ecuación diferencial esta dada por la función definida como*

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \cos x \ln(\sec x + \tan x) + \operatorname{sen}(2x),$$

donde c_1, c_2 *son constantes arbitrarias.*

Ahora vemos el método de variación de parámetros para el caso de una ecuación diferencial de n-ésimo orden.

Consideremos la ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden

$$a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + \ldots + a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} = F(x) \tag{2.23}$$

y su correspondiente ecuación homogénea asociada

$$a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + \ldots + a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} = 0. \tag{2.24}$$

Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soluciones linealmente independientes de la ecuación 2.24. La función complementaria de la ecuación no homogénea 2.23 está dada por

$$y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias.

Según el método de variación de parámetros, una integral particular tiene la forma

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \ldots + c_n(x)y_n(x).$$

Derivamos la función y_p:

$$y_p' = y_1(x)c_1'(x) + c_1(x)y_1'(x) + \ldots + y_n(x)c_n'(x) + c_n(x)y_n'(x). \tag{2.25}$$

Pedimos que

$$y_1(x)c_1'(x) + \ldots + y_n(x)c_n'(x) = 0$$

Luego, la ecuación 2.25 se simplifica a

$$y_p'(x) = c_1(x)y_1'(x) + \ldots + c_n(x)y_n'(x) = 0. \tag{2.26}$$

Derivamos y_p' de la ecuación 2.26 para obtener la segunda derivada de la integral particular:

$$y_p''(x) = y_1'(x)c_1'(x) + c_1(x)y_1''(x) + \ldots + y_n'(x)c_n'(x) + c_n(x)y_n''(x).$$

Ahora pedimos que

$$y_1'(x)c_1'(x) + \ldots + y_n'(x)c_n'(x) = 0$$

Repitiendo el mismo proceso hasta la derivada de orden n de la función y_p, exigiendo en cada derivada que las partes que contienen la derivada de $c_i(x)$ para cada $1 \leq i \leq n$ sean igual a cero y pidiendo que la última derivada (y las derivadas de orden menor a n) satisfaga la ecuación 2.23, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y_1(x)c_1'(x) + y_2(x)c_2'(x) + \ldots + y_n(x)c_n'(x) = 0 \\ y_1'(x)c_1'(x) + y_2'(x)c_2'(x) + \ldots + y_n'(x)c_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x)c_1'(x) + y_2^{(n-1)}(x)c_2'(x) + \ldots + y_n^{(n-1)}(x)c_n'(x) = \dfrac{F(x)}{a_n(x)}. \end{cases} \tag{2.27}$$

Si ponemos $W_i(f_1, \ldots, f_n)$ al determinante que se obtiene del wronskiano de $f_1, \ldots, f_n$ reemplazando la i-ésima columna por $\left(0, 0, \ldots, \dfrac{F(x)}{a_n(x)}\right)^T$, donde el superíndice T indica traspuesta, entonces la i-ésima solución $c_i'(x)$ está dada por:

$$c_i'(x) = \frac{W_i(y_1, \ldots, y_n)}{W(y_1, \ldots, y_n)}.$$

Observación 2.19. *La solución del sistema la estamos calculando por la regla de Cramer; sin embargo, en muchos casos en más rapido buscar otra forma de hallar las expresiones para $c_i'(x)$.*

Para terminar, vemos que las funciones c_i están dadas por la siguiente expresión:

$$c_i(x) = \int \frac{W_i(y_1, \ldots, y_n)}{W(y_1, \ldots, y_n)} dx.$$

El siguiente ejemplo muestra la forma de aplicar el método de variación de parámetros a una ecuación de segundo orden con coeficientes variables.

Ejemplo 2.26. *Hallar una integral particular de la ecuación*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 6x\frac{dy}{dx} + 10y = 3x^4 + 6x^3,$$

dado que $y_1 = x^2$, $y_2 = x^5$ *son soluciones linealmente independientes de la correspondiente ecuación homogénea asociada.*

Solución. Se tiene que una integral particular y_p está dada por

$$y_p(x) = x^2c_1(x) + x^5c_2(x).$$

Para hallar los valores de $c_i(x)$ para $i = 1, 2$ tenemos que resolver si sistema

$$\begin{cases} x^2c_1'(x) + x^5c_2'(x) = 0 \\ 2xc_1'(x) + 5x^4c_2'(x) = 3x^2 + 6x. \end{cases}$$

Utilizando la regla de Cramer, se tiene

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^5 \\ 3x^2+6x & 5x^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2 & x^5 \\ 2x & 5x^4 \end{vmatrix}} = \frac{3x^7+6x^6}{5x^6-2x^6} = \frac{3x^7+6x^6}{3x^6},$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 3x^2+6x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2 & x^5 \\ 2x & 5x^4 \end{vmatrix}} = \frac{3x^4+6x^3}{5x^6-2x^6} = \frac{3x^4+6x^3}{3x^6}.$$

Integrando, se tiene que $c_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$, $c_2(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - x^4 - x^3 \\ &= -\frac{1}{2}x^4 + x^3. \end{aligned}$$

Observación 2.20. *Notamos que el método de variación de parámetros presenta un gran problema. Efectivamente, para poder aplicar el método, necesitamos conocer el conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada. En general,*

para una ecuación con coeficientes variables, esto es bastante difícil de averiguar. Sin embargo, para el caso de ecuaciones con coeficientes constantes averiguar cuál es este conjunto fundamental de soluciones no representa ningún problema (en la mayoría de casos).

Ejemplo 2.27. *Hallar una integral particular de la ecuación* $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = \tan x.$

Solución. La ecuación homogénea asociada a esta ecuación es $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = 0$, su ecuación característica asociada $m^2 - 1 = 0$ tiene raíces $m_1 = 1$, $m_2 = -1$. Luego, el conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea está formado por las funciones definidas como $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$. Por el método de variación de parámetros, una integral particular tiene la forma $y_p(x) = e^x c_1(x) + e^{-x} c_2(x)$.

Las derivadas de las funciones c_1, c_2 vienen dadas por

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ \tan x & -e^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix}} = \frac{e^{-x}\tan x}{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x} = -e^{-x}\tan x,$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{x} & 0 \\ e^{x} & \tan x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix}} = \frac{e^{x}\tan x}{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x} = -e^{x}\tan x.$$

Observación 2.21. *Este ejemplo muestra que el último paso en la aplicación del método de variación de parámetros puede resultar bastante complicado. En efecto, las integrales que se generan con este método pueden ser muy difíciles de calcular. Invitamos al lector intentar hallar los valores de* $c_1(x)$, $c_2(x)$ *del ejemplo anterior.*

Ejercicios

Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones:

1. $3\dfrac{d^3y}{dx^3} + 3\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - y = \operatorname{sen} x.$

2. $2\dfrac{d^4y}{dx^4} - \dfrac{d^3y}{dx^3} - 4\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 6y = xe^{2x}$.

3. $\dfrac{d^4y}{dx^4} + \dfrac{d^3y}{dx^3} - 7\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} + 6y = xe^{-x} + 2e^{2x}$.

4. $-12\dfrac{d^5y}{dx^5} + 35\dfrac{d^4y}{dx^4} - 59\dfrac{d^3y}{dx^3} + 327\dfrac{d^2y}{dx^2} + 441\dfrac{dy}{dx} + 108y = \operatorname{sen}(3x) + 2x\cos(3x)$.

5. $\dfrac{d^6y}{dx^6} - \dfrac{d^4y}{dx^4} - \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 2\cos x$.

6. $2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + y = x^2 + x - 1$.

2.4 Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes variables

En la sección 2.2 vimos que la solución de una ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden homogénea con coeficientes constantes se pueden expresar como la combinación lineal finita de funciones elementales. Para las ecuaciones diferenciales homogéneas de orden superior con coeficientes variables sus soluciones, en general, no se pueden expresar de manera tan sencilla.

En esta sección, vamos a ver que alguna solución de la ecuación

$$a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \tag{2.28}$$

donde $a_2(x) \neq 0$, se puede expresar como una serie de potencias. Primero tenemos que dar algunas definiciones y enunciar algunos resultados preliminares.

Observación 2.22. *Se llama serie de potencias de $x - x_0$ a cualquier suma de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, donde los c_n son coeficientes arbitrarios.*

Ahora recordamos el concepto de serie de Taylor de una función f centrada en un punto x_0.

Definición 2.11. *Sea f una función que admite derivada de cualquier orden en x_0. Se llama serie de Taylor de f centrada en x_0 a la siguiente serie de potencias de $x - x_0$:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Por ejemplo, la serie de Taylor de la función e^x, centrada en $x_0 = 0$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots$$

de la función $\operatorname{sen} x$, centrada en $x_0 = 0$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \dots$$

de la función $\cos x$ centrada en $x_0 = 0$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \dots$$

La siguiente definición clasifica una clase importante de funciones.

Definición 2.12. *Una función f se dice analítica en x_0 si su serie de Taylor centrada en x_0 existe y es convergente a $f(x)$ para todo x en algún intervalo que contiene a x_0.*

Notamos que la función exponencial e^x, así como las funciones $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y los polinomios $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ son funciones analíticas en todos los reales. Además, las funciones racionales $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ son analíticas en todos los puntos x tales que $Q(x) \neq 0$. Por ejemplo, la función $1/(x^2 - 1)$ es analítica en todo $x \neq \pm 1$.

La siguiente definición es importante en nuestro proceso de hallar las soluciones de una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes variables.

Definición 2.13. *Se dice que una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden esta expresada en forma normal si tiene la forma (o se puede escribir de la forma)*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + q_1(x)\frac{dy}{dx} + q_2(x)y = 0. \tag{2.29}$$

Puesto que $a_2(x) \neq 0$ (ver ecuación 2.28), podemos hablar de normalizar una ecuación homogénea de segundo orden. En efecto, lo único que tenemos que hacer es dividir la ecuación 2.28 por $a_2(x)$.

Ejemplo 2.28. *Normalizar la ecuación*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + (x-1)y = 0.$$

Solución. Dividiendo la ecuación por x^2 obtenemos la forma normal de la ecuación. Es decir, la forma normal de la ecuación $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + (x-1)y = 0$ es la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{5}{x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{x-1}{x^2}y = 0.$$

Observación 2.23. *El proceso que realizamos para hallar la forma normal de la ecuación diferencial del ejemplo 2.28 tiene sentido siempre que $a_2(x) \neq 0$. Luego tenemos que tener mucho cuidado al normalizar una ecuación.*

Definición 2.14. *Se dice que un punto x_0 es un punto ordinario de la ecuación 2.28 si las funciones q_1 y q_2 de la ecuación 2.29 son ambas funciones analíticas en x_0.*

Si el punto x_0 no es un punto ordinario, diremos que es un punto singular.

Ejemplo 2.29. *Hallar los puntos ordinarios de la siguiente ecuación:*

$$(x^3-1)\frac{d^2y}{dx^2} - 5x\frac{dy}{dx} + x^2y = 0.$$

Solución. Normalizamos la ecuación:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{5x}{x^3-1}\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{x^3-1}y = 0.$$

Ya que $x^3 - 1 = 0$ si y solo si $x = 1$ (las dos raíces complejas del polinomio $x^3 - 1$ no las tomamos en cuenta puesto que los únicos puntos ordinarios que nos interesan son reales) tenemos que los puntos ordinarios de la ecuación son todos los (puntos) reales excepto el punto $x = 1$. Así, el punto $x = 1$ es el único punto singular de la ecuación.

2.4.1 Solución alrededor de puntos ordinarios

El siguiente teorema da una condición suficiente para la existencia de soluciones en series de potencias de una ecuación diferencial.

Teorema 2.8. *Si x_0 es un punto ordinario de la ecuación 2.28, entonces esta ecuación tiene dos soluciones linealmente independientes de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n.$$

Observamos que el teorema 2.8 no solo asegura la existencia de soluciones linealmente independientes, sino que también nos asegura que estas series de potencias convergen en algún intervalo $|x - x_0| < R$ (donde $R > 0$) alrededor de x_0.

El siguiente ejemplo muestra la forma de hallar dos soluciones linealmente independientes, expresadas en series de potencias alrededor de un punto ordinario de una ecuación diferencial.

Ejemplo 2.30. *Hallar dos soluciones linealmente independientes de la ecuación*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 + 2)y = 0. \tag{2.30}$$

Solución. En este caso, se tiene que todo punto x_0 es un punto ordinario de la ecuación 2.30. Para facilitar los cálculos elegimos $x_0 = 0$.

Así, suponemos que la solución que estamos buscando tiene la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \tag{2.31}$$

Hallamos la primera y segunda derivada de la ecuación 2.31:

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

Reemplazando estos valores en la ecuación diferencial 2.30 obtenemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0. \tag{2.32}$$

Para que las soluciones tengan la forma adecuada necesitamos que las potencias de x sean todas iguales a n. Luego la primera y tercera suma tienen que reescribirse.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^n.$$

Reemplazando estas últimas expresiones en la ecuación 2.32 obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0. \tag{2.33}$$

Para realizar operaciones algebraicas necesitamos que todas las sumas de la ecuación 2.33 comiencen desde el mismo valor. Para lograr esto soltamos algunos términos de las sumas que comienzan con índice de sumación más bajo. Así, tenemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n = 2c_2 + 6c_3x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n = c_1x + \sum_{n=2}^{\infty} nc_n x^n \text{ y}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n.$$

Reemplazando estas igualdades en la ecuación 2.33 obtenemos

$$2c_2 + 6c_3x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + c_1x + \sum_{n=2}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^n$$
$$+2c_0 + 2c_1x + 2\sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Agrupando términos, la última ecuación se puede escribir como:

$$(2c_0 + 2c_2) + (3c_1 + 6c_3)x + \sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+2)c_n + c_{n-2}]x^n = 0. \tag{2.34}$$

Para que la ecuación 2.34 se satisfaga se deben cumplir las siguientes condiciones:

Condición 1. $2c_0 + 2c_2 = 0$,

Condición 2. $3c_1 + 6c_3 = 0$ y,

Condición 3. $(n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+2)c_n + c_{n-2} = 0$ para todo $n \geq 2$.

Desde la condición 1, tenemos

$$c_2 = -c_0. \tag{2.35}$$

A partir de la condición 2, tenemos

$$c_3 = -\frac{1}{2}c_1. \tag{2.36}$$

Finalmente, desde la condición 3, tenemos

$$c_{n+2} = -\frac{(n+2)c_n + c_{n-2}}{(n+2)(n+1)}, \text{ válida para } n \geq 2. \tag{2.37}$$

La ecuación 2.37 nos proporcionan una fórmula recursiva para los valores de la constante c_{n+2}. Algunos valores son:

n	c_{n+2}
2	$c_4 = -\frac{4c_2 + c_0}{12} = \frac{1}{4}c_0$, ver ecuación 2.35
3	$c_5 = -\frac{5c_3 + c_1}{20} = \frac{3}{40}c_1$, ver ecuación 2.36
4	$c_6 = -\frac{6c_4 + c_2}{30} = -\frac{1}{60}c_0$, ver el valor de c_4 y ecuación 2.35
5	$c_7 = -\frac{7c_5 + c_3}{42} = -\frac{1}{1680}c_1$, ver valor de c_5 y ecuación 2.36

Observación 2.24. *Es inmediato ver que todos los coeficientes c_n con n par están expresados en términos del coeficiente c_0, mientras que los coeficientes c_n con n impar están expresados en términos del coeficiente c_1.*

Reemplazando estos valores en la ecuación 2.31 tenemos:

$$y = c_0 + c_1x - c_0x^2 - \frac{1}{2}c_1x^3 + \frac{1}{4}c_0x^4 + \frac{3}{40}c_1x^5 - \frac{1}{60}c_0x^6 - \frac{1}{1680}c_1x^7 + \ldots$$

Agrupando términos, tenemos

$$y = c_0\left(1 - x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots\right) + c_1\left(x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \ldots\right) \tag{2.38}$$

Las series, entre paréntesis, de la ecuación 2.38 son la expanción en series de potencias de dos soluciones linealmente independientes de la ecuación 2.30 donde las constantes c_0 y c_1 son constantes arbitrarias; luego, la ecuación 2.38 es la solución general de la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2+2)y = 0$.

Ejemplo 2.31. *Hallar la solución general de la ecuación*

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0. \tag{2.39}$$

Solución. La forma normal de la ecuación 2.39 es $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x}{2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}y = 0$. Luego, todo punto x_0 es un punto ordinario de la ecuación 2.39, elegimos $x_0 = 0$ para que se faciliten los cálculos.

Ahora procedemos igual que el ejemplo 2.30 para hallar dos soluciones linealmente independientes.

Suponemos que la solución que estamos buscando tiene la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \tag{2.40}$$

Hallamos la primera y segunda derivada de la ecuación 2.40:

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}.$$

Reemplazando estos valores en la ecuación 2.39 obtenemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{n} c_n x^n = 0. \tag{2.41}$$

Para que las soluciones tengan la forma adecuada necesitamos que las potencias de x sean todas iguales a n. Así, la primera suma tienen que reescribirse.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n.$$

Reemplazando esta última expresión en la ecuación 2.41, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{n} c_n x^n = 0. \tag{2.42}$$

Necesitamos que todas las sumas de la ecuación 2.42 comiencen desde el mismo valor. Para lograr esto saltamos algunos términos de las sumas que comienzan con

índice de sumación más bajo. Así, tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n = 2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n,$$

$$\sum_{n=0}^{n} c_n x^n = c_0 + \sum_{n=1}^{n} c_n x^n.$$

Reemplazando estas igualdades en la ecuación 2.42, obtenemos

$$2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n} c_n x^n = 0.$$

Agrupando términos, la última ecuación se puede escribir como:

$$2c_2 + \frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)c_{n+2} + \frac{1}{2}nc_n + \frac{1}{2}c_n\right]x^n = 0. \tag{2.43}$$

Para que la ecuación 2.43 se satisfaga, se deben cumplir las siguientes condiciones:

Condición 1. $2c_2 + \frac{1}{2}c_0 = 0$ y,

Condición 2. $(n+2)(n+1)c_{n+2} + \frac{1}{2}nc_n + \frac{1}{2}c_n$ para todo $n \geq 1$.

Desde la condición 1, tenemos

$$c_2 = -\frac{1}{4}c_0. \tag{2.44}$$

A partir de la condición 2, tenemos

$$c_{n+2} = \frac{\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right)c_n}{(n+2)(n+1)}, \text{ válida para } n \geq 1. \tag{2.45}$$

La ecuación 2.45 nos proporcionan una fórmula recursiva para los valores de la constante c_{n+2}. Algunos es estos valores son:

n	c_{n+2}
1	$c_3 = \frac{1}{6}c_1$
2	$c_4 = -\frac{1}{32}c_0$
3	$c_5 = \frac{1}{60}c_1$
4	$c_6 = -\frac{1}{384}c_0$

Observación 2.25. *Al igual que el ejemplo 2.30, todos los coeficientes c_n con n par están expresados en términos del coeficiente c_0, mientras que los coeficientes c_n con n impar están expresados en términos del coeficiente c_1.*

Reemplazando estos valores en la ecuación 2.40, tenemos:

$$y = c_0 + c_1 x - \frac{1}{4}c_0 x^2 + \frac{1}{6}c_1 x^3 - \frac{1}{32}c_0 x^4 + \frac{1}{60}c_1 x^5 - \frac{1}{384}c_0 x^6 + \dots$$

Agrupando términos, tenemos

$$y = c_0\left(1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{384}x^6 - \dots\right) + c_1\left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{60}x^5 + \dots\right) \quad (2.46)$$

Las series, entre paréntesis, de la ecuación 2.46 son la expansión en series de potencias de dos soluciones linealmente independientes de la ecuación 2.39 donde las constantes c_0 y c_1 son constantes arbitrarias; luego, la ecuación 2.46 es la solución general de la ecuación diferencial $2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$.

Ejercicios

El siguiente bloque de ejercicios se ha tomado de Ross [RS].

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales alrededor de algún punto ordinario:

1. $(x^2-1)\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x\dfrac{dy}{dx}+xy=0.$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+(x^2-4)y=0.$

3. $(x+3)\dfrac{d^2y}{dx^2}+(x+2)\dfrac{dy}{dx}+y=0.$

4. $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}-y=0, \\ y(0)=1, \\ y'(0)=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-2y=0, \\ y(0)=0, \\ y'(0)=1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} (2x^2-3)\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+y=0, \\ y(0)=-1, \\ y'(0)=5. \end{cases}$

2.4.2 Solución alrededor de puntos singulares

El método empleado en la subsección 2.4.1 para hallar soluciones linealmente independientes de la forma

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$$

para la ecuación diferencial

$$a_0(x)y+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

no funciona cuando el punto x_0 es un punto singular de la ecuación diferencial. En efecto, el teorema 2.8 solo es aplicable para el caso de puntos ordinarios.

Cuando x_0 es un punto singular, suponemos que las soluciones tienen la forma

$$y=\mid x-x_0\mid^r\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n,$$

donde r es una constante (real o compleja). Antes de explicar el método, llamado *método de Frobenius*, necesitamos dar la siguiente definición.

Definición 2.15. *Sea x_0 un punto singular de la ecuación*

$$a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Se dice que x_0 es un punto singular regular si las funciones definidas como

$$(x - x_0)\frac{a_1(x)}{a_2(x)} \text{ y } (x - x_0)^2\,\frac{a_0(x)}{a_2(x)}$$

son analíticas en x_0.

Observación 2.26. *Utilizando la terminología de la definición 2.13 podríamos decir: x_0 es un punto singular regular de la ecuación diferencial 2.28 (ver pag. 100) cuando las funciones definidas como $(x - x_0)q_1(x)$ y $(x - x_0)^2q_2(x)$ son analíticas en x_0. Además, diremos que x_0 es un punto singular irregular de la ecuación diferencial 2.28 cuando x_0 no es un punto singular regular.*

Ejemplo 2.32. *Hallar los puntos singulares regulares (si existen) de la siguiente ecuación:*

$$(x - 1)\frac{d^2y}{dx^2} + (7x + 3)\frac{dy}{dx} + 4(x - 3)y = 0.$$

Solución. La forma normal de la ecuación es

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{7x + 3}{x - 1}\frac{dy}{dx} + \frac{4(x - 3)}{x - 1}y = 0.$$

El punto $x_0 = 1$ es un punto singular de la ecuación diferencial. Para averiguar si este punto singular es regular calculamos los productos $(x - x_0)q_1(x)$ y $(x - x_0)^2q_2(x)$.

$$\begin{aligned}
(x - x_0)q_1(x) &= (x - 1)\frac{7x + 3}{x - 1} \\
&= 7x + 3. \\
(x - x_0)^2q_2(x) &= (x - 1)^2\frac{4(x - 3)}{x - 1} \\
&= 4x^2 - 16x + 12.
\end{aligned}$$

Como las funciones definidas por $(x - x_0)q_1(x)$ y $(x - x_0)^2q_2(x)$ son analíticas en $x_0 = 1$ se tiene que $x_0 = 1$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial.

El siguiente teorema nos da una condición necesaria para que la ecuación diferencial 2.28 tenga soluciones en series de potencias alrededor de un punto singular.

Teorema 2.9. *Si x_0 es un punto singular regular de la ecuación 2.28, entonces la ecuación 2.28 tiene al menos una solución de la forma*

$$\mid x - x_0 \mid^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \tag{2.47}$$

donde r es una constante. Además esta solución es valida para $0 < \mid x - x_0 \mid < R$.

Observación 2.27. *La constante r puede ser real o compleja y el proceso que se sigue para hallar el valor de los coeficientes c_n es, más o menos, el mismo que se realizó para el caso de puntos ordinarios. Este proceso se conoce comúnmente como método de Frobenius. Además, el método de Frobenius supone que $c_0 \neq 0$ para hallar el valor de la constante r.*

Ejemplo 2.33. *Hallar una solución, alrededor de un punto singular regular, de la ecuación diferencial*

$$2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + (x - 5)y = 0.$$

Solución. Se puede demostrar que $x_0 = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial (hacerlo). Por el teorema 2.9, existe al menos una solución de la forma

$$y = \mid x \mid^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Observación 2.28. *El método que vamos a explicar halla una solución válida para todo x tal que $0 < x < R$, si queremos hallar soluciones válidas para $-R < x < 0$ simplemente ponemos $-x > 0$.*

Ya que $\mid x \mid = x$ tenemos

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}, \tag{2.48}$$

donde $c_0 \neq 0$.

Calculamos la primera y segunda derivada de y:

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)c_n x^{n+r-1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r - 1)(n + r)c_n x^{n+r-2}.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial tenemos:

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)c_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+1} - 5\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0.$$

Para que la solución tenga la forma deseada, todas las potencias deben ser iguales a $n+r$, luego la tercera suma la tenemos que reescribir. Realizando los cambios necesarios tenemos

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)c_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n+r} - 5\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0.$$

Ahora necesitamos que todas las sumas comiencen desde un mismo valor. Es decir, todas las sumas deben comenzar desde $n = 1$.

$$2(r-1)rc_0x^r + 2\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)(n+r)c_n x^{n+r} - rc_0x^r - \sum_{n=1}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n+r} - 5c_0x^r - 5\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0.$$

Agrupando términos, tenemos

$$(2r^2 - 3r - 5)c_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty}[(2(n+r-1)(n+r) - (n+r) - 5)c_n + c_{n-1}]x^{n+r} = 0.$$

Para que esta ecuación se cumpla, recordando que $c_0 \neq 0$, se debe tener:

$$\begin{cases} 2r^2 - 3r - 5 = 0, \\ (2(n+r-1)(n+r) - (n+r) - 5)c_n + c_{n-1} = 0, \ \text{para } n \geq 1. \end{cases}$$

Observación 2.29. *La primera ecuación se le suele llamar ecuación índice asociada al punto singular regular* x_0.

Las soluciones de la ecuación índice son $r_1 = \dfrac{5}{2}$ y $r_2 = -1$. Reemplazando el valor r_1 en la segunda ecuación obtenemos la ecuación $n(2n+7)c_n + c_{n-1} = 0$ (realizar los cálculos), válida para todo $n \geq 1$. Luego, el valor de las constantes c_n están dadas por $c_n = -\dfrac{c_{n-1}}{n(2n+7)}$, para todo $n \geq 1$. Algunos de sus valores son:

n	c_n
1	$c_1 = -\dfrac{c_0}{9},$
2	$c_2 = -\dfrac{c_1}{22} = \dfrac{c_0}{198},$
3	$c_3 = -\dfrac{c_2}{39} = -\dfrac{c_0}{7722}$

Reemplazando estos valores en la ecuación 2.48, obtenemos una solución de la ecuación diferencial. En efecto, tenemos:

$$\begin{aligned} y_1 &= c_0x^{5/2} + c_1x^{7/2} + c_2x^{9/2} + c_3x^{11/2} + \dots \\ &= c_0x^{5/2} - \frac{c_0}{9}x^{7/2} + \frac{c_0}{198}x^{9/2} - \frac{c_0}{7722}x^{11/2} + \dots \\ &= c_0\left(x^{5/2} - \frac{x^{7/2}}{9} + \frac{x^{9/2}}{198} - \frac{x^{11/2}}{7722} + \dots\right) \end{aligned}$$

Ahora, reemplazamos el valor de $r_2 = -1$ en la ecuación

$$2(n+r-1)(n+r) - (n+r) - 5)c_n + c_{n-1} = 0,$$

válida para $n \geq 1$. Despejando el valor de c_n obtenemos una fórmula recursiva para estos coeficientes. En efecto, tenemos que

$$c_n = -\frac{c_{n-1}}{2n-7},$$

para todo $n \geq 1$.

Algunos valores de c_n son:

n	c_n
1	$c_1 = \frac{c_0}{5}$,
2	$c_2 = \frac{c_1}{3} = \frac{c_0}{15}$,
3	$c_3 = c_2 = \frac{c_0}{15}$

Reemplazando estos valores en la ecuación 2.48, obtenemos una nueva solución de la ecuación diferencial. En efecto, tenemos:

$$
\begin{aligned}
y_2 &= \frac{c_0}{x} + c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots \\
&= \frac{c_0}{x} + \frac{c_1}{5} + \frac{c_2}{15}x + \frac{c_0}{15}x^2 + \dots \\
&= c_0\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{5} + \frac{x}{15} + \frac{x^2}{15} + \dots\right)
\end{aligned}
$$

Observación 2.30. *En el ejemplo 2.33, el método de Frobenius nos proporciona dos soluciones linealmente independientes, pero este no es siempre el caso. Así, surgen de manera natural las siguientes preguntas:*

1. *Bajo qué condiciones podemos asegurar que la ecuación*

$$a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \tag{2.26}$$

tiene dos soluciones linealmente independientes de la forma

$$| x - x_0 |^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \tag{2.37}$$

alrededor del punto singular regular x_0.

2. *Si la ecuación diferencial 2.26 no tiene dos soluciones linealmente independientes de la forma 2.37 alrededor del punto singular regular x_0, entonces ¿cuál es la forma de una solución que es linealmente independiente con la solución de la forma 2.37?*

El siguiente teorema da respuesta a las dos preguntas anteriores.

Teorema 2.10. *Sea* x_0 *un punto singular regular de la ecuación 2.26 y sean* r_1, r_2 *(donde, podemos suponer,* $\mathrm{Re}(r_1) \geq \mathrm{Re}(r_2)$*) soluciones del la ecuación índice asociada al punto* x_0.

1. *Si* $r_1 - r_2 \notin \mathbb{N}$, *entonces la ecuación 2.26 tiene dos soluciones linealmente independientes* y_1, y_2 *cuya forma es*
$$y_1 = \mid x - x_0 \mid^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n,$$
donde $c_0 \neq 0$, *y*
$$y_2 = \mid x - x_0 \mid^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* (x - x_0)^n,$$
donde $c_0^* \neq 0$.

2. *Si* $r_1 - r_2 \in \mathbb{N}$, *entonces la ecuación 2.26 tiene dos soluciones linealmente independientes* y_1, y_2 *cuya forma es*
$$y_1 = \mid x - x_0 \mid^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n,$$
donde $c_0 \neq 0$, *y*
$$y_2 = \mid x - x_0 \mid^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* (x - x_0)^n + C y_1(x) \ln(x - x_0),$$
donde $c_0^* \neq 0$ *y* C *es una constante que puede ser cero.*

3. *Si* $r_1 - r_2 = 0$, *entonces la ecuación 2.26 tiene dos soluciones linealmente independientes* y_1, y_2 *cuya forma es*
$$y_1 = \mid x - x_0 \mid^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n,$$
donde $c_0 \neq 0$, *y*
$$y_2 = \mid x - x_0 \mid^{r_1 + 1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* (x - x_0)^n + y_1(x) \ln(x - x_0).$$

Las soluciones en los items 1, 2 y 3 son todas válidas en el intervalo $0 < \mid x - x_0 \mid < R$ *alrededor de* x_0.

Para terminar esta parte observamos que: siempre se pueden realizar los cálculos suponiendo que $x_0 = 0$. En efecto, cuando el punto singular regular es diferente de cero, utilizamos la sustitución $t = x - x_0$ para trasladar al origen todos los cálculos.

Ejercicios

El siguiente bloque de ejercicios han sido tomados de Ross [RS].

Emplear el método de Frobenius para hallar soluciones en un entorno de $x = 0$ en cada uno de los siguientes ejercicios:

1. $2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + (x^2 - 1)y = 0.$
2. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + \left(x^2 - \dfrac{1}{9}\right) y = 0.$
3. $3x\dfrac{d^2y}{dx^2} - (x - 2)\dfrac{dy}{dx} - 2y = 0.$
4. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + \left(x^2 - \dfrac{1}{4}\right) y = 0.$
5. $x\dfrac{d^2y}{dx^2} - (x^2 + 2)\dfrac{dy}{dx} + xy = 0.$
6. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + (x^4 + x)\dfrac{dy}{dx} - y = 0.$

2.5 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

Quizá los problemas de naturaleza mecánica sean los más claros ejemplos de aplicación de una ecuación diferencial de orden superior. En esta sección estudiamos muy someramente el comportamiento de un cuerpo sujeto al extremo de un resorte cuanto se le proporciona a este una fuerza. Más aplicaciones se pueden encontrar en los circuitos eléctricos, la flexión de vigas, etc.

Vibraciones mecánicas

El objetivo de esta parte es determinar la posición de un cuerpo sujeto al extremo de un resorte cuando este abandona su posición de equilibrio como efecto de aplicarle una fuerza al sistema resorte-cuerpo. Impondrémos una hipótesis (bastante fuerte) sobre el posible movimiento del cuerpo para que las ecuaciones sean más sencillas de construir y trabajar.

Consideremos un resorte de longitud L que se encuentra suspendido verticalmente desde el techo (ver figura 2.1).

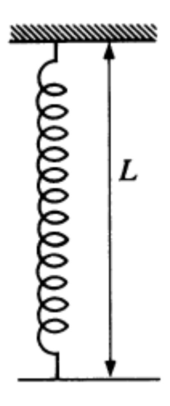


Figura 2.1: Resorte suspendido desde un techo, longitud natural L

Coloquemos un cuerpo de masa m sujeto a un extremo del resorte y dejemos que alcance nuevamente la posición de equilibrio (ver figura 2.2).

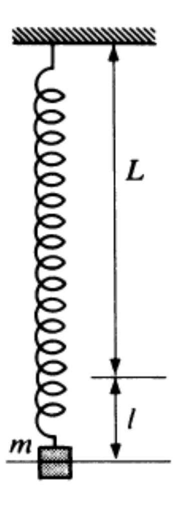


Figura 2.2: Masa en equilibrio, longitud del resorte $L + l$

Finalmente saquemos de la posición de equilibrio al sistema resorte-cuerpo estirándolo o comprimiéndolo una longitud x (ver figura 2.3).

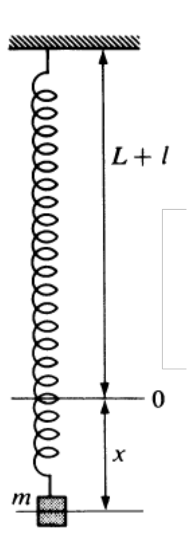


Figura 2.3: Masa a una distancia x por debajo de la posición de equilibrio; longitud del resorte $L + l + x$

Observación 2.31. *El modelo matemático que vamos a construir para describir la posición de un cuerpo de masa m considera que el movimiento de este ocurre únicamente en un dimensión (vertical). Esta hipótesis es bastante fuerte pero muy importante, pues nos permite construir las ecuaciones de forma mucha más sencilla. Además, consideramos que la dirección positiva es hacia abajo.*

Para construir el modelo matemático utilizamos la segunda ley de Newton: "*La sumatoria de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es igual a la masa del cuerpo por la aceleración de este.*"

A continuación enunciamos las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, determinando en cada caso su valor:

1. F_1, la fuerza de la gravedad. Si g es la aceleración de la gravedad (ya que esta actúa en la dirección positiva, hacia abajo), entonces $F_1 = mg$.

2. F_2, la fuerza de resistencia del resorte. Según la ley de Hooke, la fuerza que actúa sobre un cuerpo es directamente proporcional a la elongación (compresión) del

resorte. Como esta fuerza siempre se opone al movimiento del cuerpo tenemos $F_2 = -k(x+l)$ –ver figura 2.3. Notamos que si $x = 0$ (el cuerpo se encuentra en posición de equilibrio), entonces la fuerza F_2 debe ser igual a la fuerza de la gravedad y su dirección es hacia arriba, luego $-mg = -k(0+l)$. Así, $mg = kl$. Reemplazando este valor en la expresión para F_2 tenemos $F_2 = -kx - mg$.

3. F_3, la fuerza de resistencia del medio. No se conoce con exactitud cuál es la magnitud de esta fuerza, pero, para velocidades pequeñas, esta fuerza es proporcional a la velocidad, es decir, $F_3 = -a\dfrac{dx}{dt}$, donde la constante $a > 0$ se llama constante de amortiguamiento.

4. F_4, cualquier fuerza externa que actúa sobre el cuerpo. Como no conocemos con exactitud cual es la naturaleza de esta fuerza externa, nos permitimos denotarla con $F(t)$.

A partir de la segunda ley de Newton tenemos:

$$\sum_{i=1}^{4} F_i = m\frac{d^2x}{dt^2},$$

reemplazando los valores de cada F_i descritas arriba, tenemos

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{4} F_i \\ &= mg - kx - mg - a\frac{dx}{dt} + F(t) \\ &= -kx - a\frac{dx}{dt} + F(t). \end{aligned}$$

Así, la ecuación diferencial (modelo matemático) que describe la posición de un cuerpo de masa m en cualquier instante t está dada por

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = F(t). \tag{2.38}$$

Si además imponemos las condiciones $x(t_0) = x_0$ y $x'(t_1) = x_1$ obtenemos el siguiente problema (con condiciones iniciales o con condiciones en la frontera dependiendo de los valores de t_0 y t_1):

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} + a\dfrac{dx}{dt} + kx = F(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_1) = x_1. \end{cases}$$

Observación 2.32. *Cuando* $F(t) = 0$ *se dice que el cuerpo tiene un movimiento libre; en otro caso, se dice que el movimiento es forzado. Además, cuando la constante* $a = 0$ *se dice que el movimiento es no amortiguado y cuando* $a \neq 0$ *se dice que el movimiento es amortiguado.*

Naturalmente, se pueden tener combinaciones de los tipos de movimientos que se menciona en la observación 2.32. Por ejemplo, se puede hablar de un movimiento libre amortiguado o de un movimiento forzado no amortiguado, etc. en cada caso la ecuación 2.38 toma una forma específica.

Para finalizar esta parte, mencionamos que, para hallar la posición de un cuerpo que tiene un movimiento forzado, primero tenemos que hallar la función complementaria del cuerpo que tiene un movimiento libre.

Circuitos electrónicos

En esta parte construimos un modelo matemático para estudiar el comportamiento de la corriente i que fluye a travéz de un circuito en serie como el que se muestra en la figura 2.4:

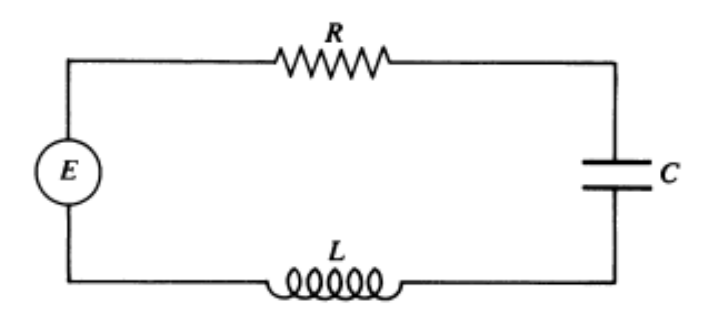


Figura 2.4: Circuito en serie

En la Figura 2.4 se utiliza la siguiente simbología:

E	Para la fuerza electromotriz (pila o generador) de voltaje E
R	Para un resistor de resistencia R
L	Para un inductor de inductancia L
C	Para un capacitor de capacitancia C

Recordamos que la caída de voltaje E_α (donde α puede ser el resistor, el capacitor o el inductor) a través de cada elemento del circuito está dada por:

1. $E_R = Ri$, donde R es la resistencia del resistor.
2. $E_C = \frac{1}{C}q$, donde C es la capacitancia del capacitor y q es la carga instantánea del capacitor.
3. $E_L = L\frac{di}{dt}$, donde L es la inductancia del inductor.

Por la primera ley de Kirchhoff: "La suma algebraica de las caídas de voltage a través de un circuito cerrado en una dirección específica es igual a cero." y puesto de las caídas de voltaje a través del resistor, capacitor e inductor tienen signo opuesto al generado por la fuerza electromotriz se tiene que:

$$Ri + \frac{1}{C}q + L\frac{di}{dt} = E.$$

Además, recordando que la corriente i se define como la derivada de la carga con respecto al tiempo, la última ecuación se puede escribir como:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E. \tag{2.39}$$

La ecuación 2.39 es una ecuación diferencial de segundo orden donde la variable independiente (incógnita) es la carga q.

Para averiguar cómo es el comportamiento de la corriente i (una vez resuelta la ecuación 2.39), tenemos que derivar la carga q. Es decir,

$$i(t) = \frac{dq}{dt}.$$

Flexión de vigas

Consideremos el siguiente problema:

Problema 2.1. *Determinar la flexión de una viga rectangular sometida a una carga.*

Para hallar la solución al problema 2.1 consideramos las siguientes hipótesis:

1. Inicialmente la viga es recta y su eje central coincide con el eje X (ver figura 2.5).

2. El eje central de la viga se flexiona debido a la acción de una carga (suma de fuerzas aplicadas a la viga) –ver figura 2.6.

3. Todas las fuerzas que se aplican a la viga están sobre un mismo plano, el cual además contiene al eje central.

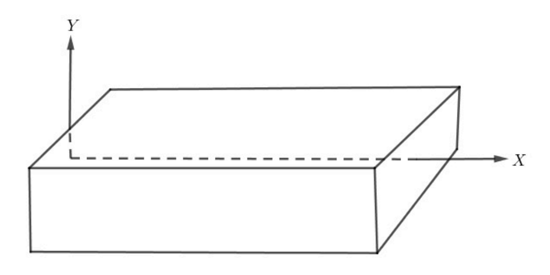


Figura 2.5: Viga horizontal

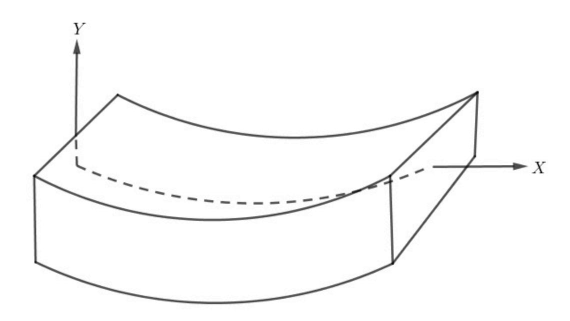


Figura 2.6: Aplicación de una carga a una viga

La curva punteada en la figura 2.6 (la deformación del eje central), llamada curva elástica, nos indica cuánto se ha deformado la viga. Por lo tanto, se desea obtener la ecuación de la curva elástica.

Sea $M(x)$ el *momento flexionante* en una sección transversal vertical de la viga en x. En mecánica se demuestra que el momento flexionante en x, debido a todas las fuerzas exteriores que actúan sobre la viga (ver figura 2.7), está dado por

$$M(x) = \frac{EI}{R},$$

donde E es el módulo de elasticidad de Young que depende del material y del diseño de la viga, I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga en x y R es el radio de curvatura de la curva elástica.

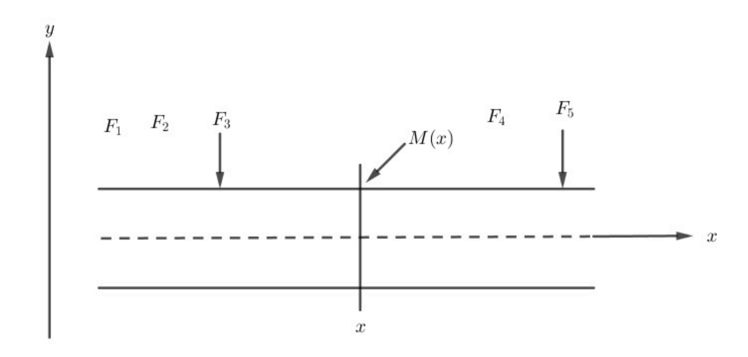


Figura 2.7: Momento flexionante en x

El radio de curvatura R estás dado por $R = \dfrac{[1+(y')^2]^{3/2}}{y''}$. Si asumimos que la viga se dobla solo levemente, y' del radio de curvatura es tan pequeño que su cuadrado es despreciable con respecto a 1; es decir, para fines prácticos, se puede considerar que $R = \dfrac{1}{y''}$. Reemplazando este valor en la expresión para $M(x)$ se tiene que:

$$M(x) = EI\frac{d^2y}{dx^2}. \tag{2.40}$$

La ecuación 2.40 es una ecuación diferencial completa de segundo orden con coeficientes constantes que modela la flexión de una viga.

2.6 Ejercicios del capítulo 2

1. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones homogeneas:

   a) $12\dfrac{d^5y}{dx^5} + 31\dfrac{d^4y}{dx^4} + 31\dfrac{d^3y}{dx^3} + 118\dfrac{d^2y}{dx^2} - 68\dfrac{dy}{dx} - 24y = 0.$

   b) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 3\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + 3y = 0.$

   c) $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} = 0.$

   d) $2\dfrac{d^3y}{dx^3} + 5\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} + 3y = 0.$ Sugerencia: Usar el método de Cardano para hallar las raíces del polinomio característico.

2. Hallar la solución general de la ecuación $\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 3y = xe^{2x}$.

3. Hallar la integral particular de la ecuación $3\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} - 2y = \ln x$.

4. Hallar la solución general, en series de potencial alrededor del punto $x_0 = 1$, de la ecuación $x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 2y = 0$.

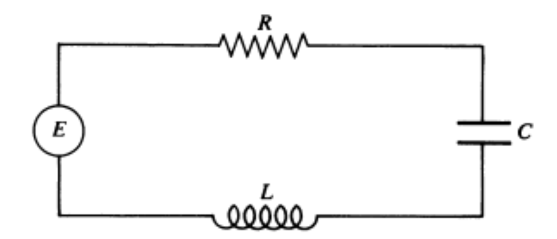
5. Hallar dos soluciones (en series de potencias) linealmente independientes, alrededor de $x_0 = 0$, de la ecuación $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(x + \frac{1}{2}\right)\frac{dy}{dx} + xy = 0$.

Los siguientes ejercicios se han tomado de O'Neil [OP]

6. Una pesa de 16 libras queda suspendida de un resorte, alargándolo 6 pulgadas. La pesa es jalada otras 3 pulgadas abajo de esta posición de equilibrio y liberada. En este instante, se aplica al sistema una fuerza igual a $\frac{1}{4}\cos(6t)$. Calcule y trace una gráfica de la función de desplazamiento, suponiendo que no hay amortiguamiento.

7. Calcule el movimiento de la pesa del problema 6 si hay una fuerza de amortiguamiento de $8v$ libras, donde v es la velocidad de la pesa.

En cada uno de los siguientes ejercicios obtenga la corriente $i(t)$ en el circuito RLC que se muestra a continuación, con los valores de R, L y C y suponiendo que una corriente inicial y carga del capacitor iguales a cero.



8. $R = 400$ ohms, $L = 0.12$ henry, $C = 0.004$ farad, $E(t) = 120\,\text{sen}(20t)$ volts.

9. $R = 200$ ohms, $L = 0.1$ henry, $C = 0.006$ farad, $E(t) = te^{-t}$ volts.

10. $R = 450$ ohms, $L = 0.95$ henry, $C = 0.007$ farad, $E(t) = e^{-t}$ volts.

11. $R = 150$ ohms, $L = 0.2$ henry, $C = 0.05$ farad, $E(t) = 1 - e^{-t}$ volts.

Capítulo 3

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

En el capítulo 1 y el capítulo 2, estudiamos algunos fenómenos que se pueden expresar por medio de una sola cantidad (ver sección 1.1 y sección 2.5). Por ejemplo, la población $P(t)$ se expresa por medio de una sola cantidad. Además, vimos que para estudiar la razón de cambio de esta población necesitamos únicamente algunos supuestos sobre la misma población.

Para fenómenos más complejos, necesitamos más de una cantidad para estudiar su razón de cambio. Por ejemplo, para estudiar la razón de cambio de una población de zorros necesitamos saber cual es el tamaño de la población de presas (por ejemplo, cual es la población de conejos) y la disponibilidad de alimento.

Por un lado, el estudio de los fenómenos cuya razón de cambio depende de una sola cantidad nos condujo a la idea de ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden (donde $n \geq 1$). Por otro lado, el estudio de fenómenos cuya razón de cambio depende de más de una cantidad nos llevará a la idea de sistema de ecuaciones diferenciales. El siguiente ejemplo nos ilustra un fenómeno de este último tipo.

Consideremos un ecosistema donde coexisten dos especies con la peculiaridad de que una especie se come a la otra. Es decir, una especie es la depredadora y la otra especie es la presa.

Las hipótesis que vamos a considerar para construir nuestro modelo son las siguientes:

1. Si no hay depredadores, entonces la población de presas crece a una tasa proporcional a su población y, además esta población no está afectada por la sobrepoblación.

2. La tasa a la que las presas son devoradas es proporcional a la tasa a la que los depredadores y las presas interactúan.

3. Sin la presencia de presas, la población de depredadores disminuye a una razón

proporcional a ella misma.

4. La tasa de nacimientos de depredadores es proporcional al número de presas devoradas que, por la hipótesis 2, es proporcional a la razón a la que las presas y los depredadores interactúan.

Para la formulación del modelo matemático utilizamos las siguientes variables y constantes:

D	es la población de depredadores al tiempo t.
P	es la población de presas al instante t.
α	es el coeficiente de la razón de crecimiento de las presas.
β	es el coeficiente de la razón de muerte de los depredadores.
γ	es el coeficiente de proporcionalidad de las interacciones entre el depredador y la presa (en las que la presa es devorada).
δ	es la constante de proporcionalidad del beneficio de la población de depredadores por una presa devorada.

Suponemos que los coeficientes α, β, γ y δ son todos positivos. Desde la hipótesis 1 concluimos que la variación de la población de presas contiene al término αP. Desde la hipótesis 3, la población de depredadores contiene al término $-\beta D$ donde, el signo negativo indica que la población decrece.

Ahora debemos hallar un término que exprese la hipótesis 2, es decir, un término que crezca si D o P aumentan pero, que se anule cuando $D = 0$ o $P = 0$. La forma más fácil de expresar estas ideas es elegir DP como la expresión para indicar la interacción entre los depredadores y las presas. Luego la variación de la población de presas está afectada por el término $-\gamma DP$. De la misma manera la variación de la población de depredadores es afectada por el término δDP.

Con estas consideraciones, se tiene que: el modelo matemático (sin resolver) para describir la dinámica depredador-presa está dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = \alpha P - \gamma DP, \\ \dfrac{dD}{dt} = -\beta D + \delta DP. \end{cases}$$

Este conjunto formado por dos ecuaciones diferenciales es un ejemplo de lo que se conoce como sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Más específicamente, se tiene la siguiente definición:

Definición 3.1. *Se llama **sistema de ecuaciones diferenciales** a cualquier conjunto de dos o más ecuaciones en el cual aparezcan las derivadas de una o más variables independientes, las incógnitas de la ecuación, respecto a una o más variables dependientes.*

Son ejemplos de sistemas de ecuaciones diferenciales los siguientes:

1. $$\begin{cases} \dfrac{df}{dx} = 4f + 7g, \\ \dfrac{dg}{dx} = f + g. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 7v, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales se denomina sistema ordinario cuando todas las derivadas que aparecen en el sistema son derivadas ordinarias (el sistema 1 es un ejemplo de sistema ordinario); en caso contrario, el sistema se denomina sistema parcial (el sistema 2 es un ejemplo de sistema parcial).

Observación 3.1. *En este texto tratamos únicamente sistemas ordinarios y cada vez que mencionemos sistema de ecuaciones diferenciales entenderemos que se trata de un sistema ordinario.*

El objetivo de este capítulo es estudiar sistemas de ecuaciones diferenciales para los que se conoce métodos analíticos de solución.

3.1 Generalidades sobre los sistemas lineales

Una primera clasificación que se hace a los sistemas de ecuaciones diferenciales es en sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y sistemas de ecuaciones diferenciales no

lineales. La siguiente definición establece con toda precisión lo que se entiende por sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

Definición 3.2. *Se llama sistema de ecuaciones diferenciales lineales al siguiente conjunto de ecuaciones*

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{M_{11}} a_{1i}^1(t)\dfrac{d^i x_1}{dt^i} + \sum_{i=0}^{M_{12}} a_{1i}^2(t)\dfrac{d^i x_2}{dt^i} + \ldots + \sum_{i=0}^{M_{1n}} a_{1i}^n(t)\dfrac{d^i x_n}{dt^i} = f_1(t) \\ \sum_{i=0}^{M_{21}} a_{2i}^1(t)\dfrac{d^i x_1}{dt^i} + \sum_{i=0}^{M_{22}} a_{2i}^2(t)\dfrac{d^i x_2}{dt^i} + \ldots + \sum_{i=0}^{M_{2n}} a_{2i}^n(t)\dfrac{d^i x_n}{dt^i} = f_2(t) \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{M_{m1}} a_{mi}^1(t)\dfrac{d^i x_1}{dt^i} + \sum_{i0}^{M_{m2}} a_{mi}^2(t)\dfrac{d^i x_2}{dt^i} + \ldots + \sum_{i=0}^{M_{mn}} a_{mi}^n(t)\dfrac{d^i x_n}{dt^i} = f_m(t) \end{cases}$$

Observación 3.2. *Para simplificar el lenguaje diremos sistema lineal en vez de sistema de ecuaciones diferenciales lineales.*

En el caso particular de $M_{ij} = 1$ para todo $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, el sistema se llama lineal de primer orden. De esta forma, en un sistema lineal de primer orden, cada ecuación contiene a lo máximo la primera derivada (la derivada de orden cero, cuando $i = 0$, corresponde a la misma función). Luego, un sistema lineal de primer orden se puede escribir como

$$\begin{cases} a_{11}(t)\dfrac{dx_1}{dt} + a_{12}(t)\dfrac{dx_2}{dt} + \ldots + a_{1n}(t)\dfrac{dx_n}{dt} + \sum_{i=n}^{n} b_{1i}(t)x_i = f_1(t) \\ a_{21}(t)\dfrac{dx_1}{dt} + a_{22}(t)\dfrac{dx_2}{dt} + \ldots + a_{2n}(t)\dfrac{dx_n}{dt} + \sum_{i=n}^{n} b_{2i}(t)x_i = f_2(t) \\ \vdots \\ a_{m1}(t)\dfrac{dx_1}{dt} + a_{m2}(t)\dfrac{dx_2}{dt} + \ldots + a_{mn}(t)\dfrac{dx_n}{dt} + \sum_{i=n}^{n} b_{mi}(t)x_i = f_m(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

Cuando $m = n$, el sistema 3.1 tiene igual número de ecuaciones y de incógnitas y podemos llamarlo cuadrado[1]. Este texto trata únicamente sistemas cuadrados y cada

[1] La denominación no es estándar; sin embargo, nosotros utilizamos este nombre para que guarde relación con los sistemas algebraicos.

vez que mencionemos sistema de ecuaciones diferenciales entenderemos que se trata de un sistema cuadrado.

Ahora clasificamos el sistemas 3.1.

1. El sistema se llama homogéneo cuando $f_i(t) = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$.
2. El sistema se llama con coeficientes constantes cuando $a_{ij}(x)$ y $b_{ij}(t)$ son funciones constantes para todo $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.
3. El sistema se dice que es un sistema con coeficientes variables cuando alguna función $a_{ij}(x)$ o $b_{ij}(t)$ no es una función constante para algún $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} x^2 \dfrac{dx}{dt} - 3\dfrac{dy}{dt} = x - 1 \\[2ex] \dfrac{dx}{dy} + \operatorname{sen} x \dfrac{dy}{dt} = 0, \end{cases}$$

es un sistema con coeficientes variables no homogéneo. Mientras, el sistema

$$\begin{cases} x^2 \dfrac{dx}{dt} - 3\dfrac{dy}{dt} = 0 \\[2ex] \dfrac{dx}{dy} + \operatorname{sen} x \dfrac{dy}{dt} = 0, \end{cases}$$

es un sistema con coeficientes variables homogéneo.

Definición 3.3. *Se llama solución del sistema 3.1 en el intervalo I a cualquier vector $\overrightarrow{x(t)} = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ tal que las funciones $x_i(t)$ y sus derivadas están definidas en el intervalo I, para todo $1 \leq i \leq n$, y las funciones $x_i(t)$ satisfacen el sistema en el intervalo I.*

Ejemplo 3.1. *Comprobar que el vector $\overrightarrow{x(t)} = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$ es solución del sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = 2x, \end{cases}$$

en el intervalo $I = \mathbb{R}$.

Solución. Las funciones definidas por $x(t) = \cos 2t$, $y(t) = \operatorname{sen} 2t$ están definidas en todo t real. Ademas $\dfrac{dx}{dt} = -2\operatorname{sen} 2t = -2y$, $\dfrac{dy}{dt} = 2\cos 2t = 2x$. Luego, las funciones x, y satisfacen el sistema.

Definición 3.4. *Se dice que un sistema de ecuaciones diferenciales es normal cuando tiene la forma (o se puede reducir a esta forma)*

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}x_n(t) + b_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n(t) + b_2(t) \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}x_n(t) + b_1(t). \end{cases}$$

Un sistema normal es importante por su conección con las ecuaciones de orden superior. En efecto, consideremos la ecuación de n-ésimo orden

$$a_0(t)x + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_2(t)\frac{d^2x}{dt^2} + \ldots + \frac{d^nx}{dt^n} = b(t). \tag{3.2}$$

Realicemos las siguientes sustituciones:

$$x_1 = x, x_2 = \frac{dx}{dt}, x_3 = \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, x_{n-1} = \frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}, x_n = \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}.$$

De esta manera conseguimos la siguiente cadena de derivadas:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = \frac{dx_{n-1}}{dt}, \frac{d^nx}{dt^n} = \frac{dx_n}{dt}.$$

Así, podemos considerar el siguiente sistema normal

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \quad\vdots \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\ \dfrac{dx_n}{dt} = b_n - a_0(t)x_1 - a_1(t)x_2 - \ldots - a_{n-1}(t)x_n, \end{cases}$$

cuya solución $\overrightarrow{x(t)} = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ es claramente solución de la ecuación diferencial de n-ésimo orden 3.2.

3.2 El operador diferencial

En esta sección estudiamos un método de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes. Este método depende fuertemente del uso del operador diferencial que introducimos en la siguiente definición:

Definición 3.5. *Se llama operador diferencial D a la función definida como la operación de derivación.*

A partir de la definicón 3.5 se tiene que el campo de aplicación del operador diferencial D es el conjunto de todas las funciones x que admiten primera derivada (sobre algún intervalo I).

Por ejemplo, D aplicado a la función $\operatorname{sen} x$ es la función $\cos x$, es decir,

$$D(\operatorname{sen} x) = \frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx} = \cos x.$$

Observación 3.3. *Por recursión se puede definir el operador D^n. En efecto, se tiene que*

$$D^n = D(D^{n-1}).$$

A partir de la definición del operador D^n se tiene que $D^n(f) = \dfrac{d^n f}{dx^n}$ siempre que f sea una función que admite derivada hasta el orden n. Además, admitimos que $D^0(f) = f$.

Al operador diferencial D^n se llama operador diferencial de orden n u operador diferencial de n-ésimo orden.

Sea Ω el conjunto de todos los operadores diferenciales. Se define en Ω las operaciones suma y producto por escalar. En efecto, sean D_1, D_2 dos operadores diferenciales y λ un número real. La suma $D_1 + D_2$ y el producto por escalar λD_1 se definen de la siguiente manera:

1. $(D_1 + D_2)(f) = D_1(f) + D_2(f)$.

2. $(\lambda D_1)(f) = \lambda D_1(f)$.

A partir de las operaciones suma y producto por escalar se define el siguiente operador diferencial.

Definición 3.6. *Se llama operador diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes al siguiente operador:*

$$L\colon = a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \ldots + a_n D^n, \tag{3.3}$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Es inmediato, a partir de la Definición 3.6, que el operador diferencial lineal de orden n es un operador lineal, es decir, $L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$.

Definición 3.7. *Sea I un intervalo abierto, n un número natural. Denotamos por $C^n(I)$ al conjunto de todas las funciones f tales que f y todas sus derivadas de orden hasta n son continuas en I.*

En la Definición 3.7 se entiende que $C^0(I)$ es el conjunto de todas las funciones continuas en I y $C^\infty(I)$ es el conjunto de todas las funciones infinitamente derivables con continuidad.

Observación 3.4. *Por definición, L es una función con dominio $C^n(I)$ y recorrido $C^0(I)$.*

Sean L_1 y L_2 los operadores diferenciales dados por

$$\begin{aligned} L_1 &= a_0 + a_1 D, \\ L_2 &= b_1 D. \end{aligned}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} (L_1 \circ L_2)(f) &= L_1(L_2(f)) \\ &= L_1(b_1 D(f)) \\ &= L_1\left(b_1 \frac{df}{dx}\right) \\ &= a_0 b_1 \frac{df}{dx} + a_1 D\left(b_1 \frac{df}{dx}\right) \\ &= a_0 b_1 \frac{df}{dx} + a_1 b_1 \frac{d^2 f}{dx^2} \\ &= (a_0 b_1 D + a_1 b_1 D^2)(f). \end{aligned}$$

Se puede comprobar fácilmente que $L_1 \circ L_2 = L_2 \circ L_1$.

Las operaciones realizadas arriba nos muestran que para hallar $L_1 \circ L_2$ podemos multiplicar L_1 con L_2 como si fueran polinomios. En realidad se puede demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *Sean $L_1 = a_0 + a_1 D + \ldots + a_n D^n$, $L_2 = b_0 + b_1 D + \ldots + b_m D^m$ dos operadores diferenciales lineales. La composición del operador L_1 con el operador L_2 está dada por*

$$L_1 \circ L_2 = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} a_i b_j D^{i+j}.$$

Observación 3.5. *El teorema 3.1 nos dice que la composición entre operadores tiene el mismo comportamiento que la multiplicación entre polinomios, luego podemos escribir $L_1 L_2$ en lugar de $L_1 \circ L_2$.*

La analogía que existe entre la composición de operadores diferenciales lineales con coeficientes constantes y la multiplicación de polinomios nos permite factorar un operador diferencial. En efecto, el operador 3.3 se puede factorar como

$$L = a_n (D - r_1)(D - r_2) \ldots (D - r_n),$$

donde r_i para $1 \leq i \leq n$ son las raíces del polinomio $a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots + a_n r^n$.

En la práctica, cuando existen raíces complejas, digamos r_j y $\overline{r_j}$, se las combina (multiplica) para formar un polinomio de segundo grado irreducible.

Un método operacional para resolver sistemas lineales

En esta parte, explicamos como aplicar la noción de operador diferencial a la resolución de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes. Nos limitamos a explicar el método, que ciertamente funciona, abandonando completamente el sustento teórico del mismo.

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 2x - 4y = e^t, \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - y = e^{4t}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Utilizando el operador diferencial lineal, el sistema 3.4 lo podemos escribir como

$$\begin{cases} (D-2)(x) + (D-4)(y) = e^t, \\ \\ D(x) + (D-1)(y) = e^{4t}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Trabajamos ahora en el sistema 3.5. Multiplicando por D la primera ecuación y por $D-2$ la segunda ecuación, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} D(D-2)(x) + D(D-4)(y) = D(e^t), \\ \\ D(D-2)(x) + (D-1)(D-2)(y) = (D-2)(e^{4t}). \end{cases}$$

Restamos la primera ecuación con la segunda para obtener $(-D-2)(y) = e^t - 2e^{4t}$, la cual representa la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 2e^{4t} - e^t. \tag{3.6}$$

La ecuación 3.6 es una ecuación diferencial lineal de primer orden cuya solución es $y = \frac{1}{3}e^{4t} - \frac{1}{3}e^t + k_1 e^{-2t}$ (ver sección 1.4, pag. 52) donde k_1 es una constante arbitraria.

Ahora multiplicando por $D-1$ la primera ecuación y por $D-4$ la segunda ecuación obtenemos el sistema

$$\begin{cases} (D-1)(D-2)(x) + (D-1)(D-4)(y) = (D-1)(e^t), \\ \\ D(D-4)(x) + (D-1)(D-4)(y) = (D-4)(e^{4t}). \end{cases}$$

Restamos la primera ecuación de la segunda para obtener $(D+2)(x) = 0$, la cual representa la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} + 2x = 0. \tag{3.7}$$

La ecuación 3.7 es una ecuación diferencial en variables separables cuya solución es $x = k_2 e^{-t}$ (ver sección 1.2, pag. 34) donde k_2 es una constante arbitraria.

A este punto podemos verificar que las funciones x, y halladas con este procedimiento aún no satisfacen el sistema 3.4 pero, esta inperfección se debe a que estas funciones contiene demasiadas constantes arbitrarias.

Para averiguar cuantas constantes arbitrarias deben contener las soluciones del sistema calculamos el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{D-2} & \text{D-4} \\ \text{D} & \text{D-1} \end{vmatrix}.$$

Realizando el cálculo del determinante se tiene que $\Delta = D + 2$. Resulta que Δ es un operador diferencial de primer orden. Luego debe existir únicamente una constante arbitraria en las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales.

Para hallar la única constante arbitraria reemplazamos los valores hallados para x, y en cada una de las ecuaciones del sistema 3.4.

Desde la primera ecuación, obtenemos (realizar los cálculos)

$$6k_1 + 4k_2 = 0. \tag{3.8}$$

A partir de la segunda ecuación obtenemos la ecuación (realizar los cálculos)

$$3k_1 + 2k_2 = 0. \tag{3.9}$$

Las ecuaciones 3.8 y 3.9 constituyen un sistema de ecuaciones en las incógnitas k_1, k_2. Además, la matriz de coeficientes tiene rango 1, luego el sistema tiene infinitas soluciones, en particular una de las incógnitas se puede expresar en términos de la otra.

Desde la ecuación 3.9 (o desde la ecuación 3.8) se tiene que $k_2 = -\dfrac{3}{2}k_1$. Así, las soluciones del sistema 3.4 estan dadas por

$$x = -\frac{3}{2}k_1 e^{-t}, \qquad y = \frac{1}{3}e^{4t} - \frac{1}{3}e^{t} + k_1 e^{-2t}.$$

Ejemplo 3.2. *Hallar la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales:*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2y = \operatorname{sen} t, \\[2mm] \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - x - y = 0. \end{cases}$$

Solución. Escribimos el sistema utilizando el operador diferencial.

$$\begin{cases} D(x) + (D+2)(y) = \operatorname{sen} t, \\ (D-1)(x) + (D-1)(y) = 0. \end{cases}$$

Multiplicamos la primera ecuación por $D-1$ y la segunda ecuación por $D+2$, luego restamos la primera ecuación de la segunda y obtenemos $(-2D+2)(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$. Claramente, esta expresión representa la ecuación de primer orden lineal

$$\frac{dx}{dt} - x = \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{2}. \tag{3.10}$$

Ahora multiplicamos por $D-1$ la primera ecuación y por D la segunda ecuación. Restando la primera ecuación de la segunda se obtiene $(2D-2)(y) = \cos x - \operatorname{sen} x$, esta expresión representa la ecuación lineal de primer orden

$$\frac{dy}{dt} - y = \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{2}. \tag{3.11}$$

Las ecuaciones 3.10 y 3.11 tienen solución $x = -\frac{\operatorname{sen} t}{2} + \frac{k_1 e^t}{2}$, $y = \frac{\operatorname{sen} t}{2} + \frac{k_2 e^t}{2}$ respectivamente. Nos falta saber cuantas constantes arbitrarias tienen las soluciones (por el momento aparecen las constantes arbitrarias k_1 y k_2). Con el propósito de averiguarlo calculamos el determinante cuya primera fila está formada por los operadores diferenciales de la primera ecuación y cuya segunda fila está formada por los operadores de la segunda ecuación. Es decir, calculamos el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{D} & \text{D+2} \\ \text{D-1} & \text{D-1} \end{vmatrix} = -2D + 2.$$

Puesto que este es un operador de orden 1, las soluciones deben tener una sola constante arbitraria (esto significa que las soluciones deben compartir la misma constante arbitraria). Para obtener los valores de k_1, k_2 reemplazamos las ecuaciones de x, y en el sistema.

Desde la primera ecuación del sistema se obtiene la ecuación $k_1 + k_2 = 0$. La segunda ecuación no da ninguna información sobre los valores de k_1 y k_2 (reemplazando se tiene $0 = 0$, que es una verdad absoluta pero, no da información

sobre k_1 y k_2). Luego se tiene que $k_2 = -k_1$. Finalmente, reemplazamos el valor de k_2 en las ecuaciones que obtuvimos para x, y.

$$x = -\frac{\operatorname{sen} t}{2} + \frac{k_1 e^t}{2}, \qquad y = \frac{\operatorname{sen} t}{2} - \frac{k_1 e^t}{2}.$$

Ejercicios

Los siguientes ejercicios han sido tomados de Ross [RS].

Utilizar el método operacional para hallar la solución general en cada uno de los sistemas siguiente:

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 2x - 4y = e^t, \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - y = e^{4t}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - x = -2t, \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 3x - y = t^2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - x - y = e^{-t}, \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2x + y = e^t. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2y = \operatorname{sen} t, \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - x - y = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - x - y = 1, \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2x - y = t. \end{cases}$

3.3 Método matricial para sistemas normales homogéneos con coeficientes constantes

En esta sección, explicamos cómo utilizar matrices para resolver un sistema normal homogéneo con coeficientes constantes (ver definición 3.4, pag. 130). Es decir, sistemas normales para los cuales las funciones b_i son nulas para todo $1 \leq i \leq n$.

Suponemos que el lector tiene conocimiento de la teoría básica de matrices. Sin embargo, comenzamos esta sección recordando algunos conceptos y resultados básicos sobre matrices.

Conceptos básicos de la teoría de matrcices

Se llama matriz de orden $n \times m$ a cualquier arreglo de n filas con m columnas[2]. Para una matriz A de orden $n \times m$, utilizamos la siguiente representación:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Los números reales (o funciones reales) a_{ij} se llaman entradas de la matriz donde, el subíndice i indica la fila y el subíndice j indica la columna, luego $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

Es costumbre denotar a la matriz A simplemente con $A = (a_{ij})_{m\times n}$ o con $A = (a_{ij})$ cuando está claro cual es el orden de la matriz.

Clases especiales de matrices son las llamadas matrices cuadradas, la matriz traspuesta de una matriz dada y las matrices columna cuyas definiciones son como sigue:

Definición 3.8. *1. Se dice que una matriz A es cuadrada cuando $m = n$. Es decir, una matriz de la forma*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

2. Sea $A = (a_{ij})_{m\times n}$ una matriz. Se llama matriz traspuesta de A a la matriz

[2]Aunque esta noción de matriz es correcta, es demasiado general para nuestros propósitos. En este texto, las filas y columnas de una matriz están formadas únicamente por números reales o funciones reales.

$A^T = (a_{ji})_{n\times m}$. *Es decir, a la matriz que se obtiene de* A *cambiando sus filas por sus columnas.*

3. *Se dice que una matriz* B *es una matriz columna cuando* $n = 1$. *Es decir, una matriz de la forma*

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}.$$

Además de las matrices definidas anteriormente se puede mencionar a la matriz identidad y a la matriz nula. La matriz cuadrada $I = (a_{ij})$ se dice matriz identidad si $a_{ij} = 1$ cuando $i = j$ y $a_{ij} = 0$ en otro caso. Se llama matriz nula a la matriz cuyas entradas son todas iguales a cero.

Observación 3.6. *Una matriz columna de orden* $m \times 1$ *se llama vector de orden* m *o simplemente vector cuando no haya ambigüedad sobre el orden de este vector.*

Definición 3.9. *Sea* $A = (a_{ij})$ *una matriz de orden* $m \times n$. *Se dice que la matíz* A *es constante si* $a_{ij} \in \mathbb{R}$ *para todo* $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. *Si la matriz* A *no es constante se dice que es una matriz función.*

Son ejemplos de matrices las siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ -5 & 0 & 7 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & 10 \end{bmatrix}, \quad \varphi(t) = \begin{bmatrix} t-1 & -t^2+5 & \operatorname{sen} t + 7 & \ln t \\ t^2 & t-2 & \tan t & \sec t \\ 1-t & t^2+t-1 & \dfrac{1}{t} & t \end{bmatrix}.$$

A es una matriz constante y $\varphi(t)$ es una matriz función.

Observación 3.7. *Sean* $\varphi(t)$ *una matriz función,* $c \in \mathbb{R}$. *Se definen las matrices*

$\dfrac{d\varphi(t)}{dt}$, *matriz derivada de* $\varphi(t)$, *y* $\displaystyle\int_c^t \varphi(u)du$, *matriz integral de* $\varphi(t)$, *como sigue:*

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \varphi'_{11}(t) & \varphi'_{12}(t) & \dots & \varphi'_{1n}(t) \\ \varphi'_{21}(t) & \varphi'_{22}(t) & \dots & \varphi'_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi'_{m1}(t) & \varphi'_{m2}(t) & \dots & \varphi'_{mn}(t) \end{bmatrix},$$

$$\int_c^t \varphi(u)du = \begin{bmatrix} \displaystyle\int_c^t \varphi_{11}(u)du & \displaystyle\int_c^t \varphi_{12}(u)du & \dots & \displaystyle\int_c^t \varphi_{1n}(u)du \\ \displaystyle\int_c^t \varphi_{21}(u)du & \displaystyle\int_c^t \varphi_{22}(u)du & \dots & \displaystyle\int_c^t \varphi_{2n}(u)du \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \displaystyle\int_c^t \varphi_{m1}(u)du & \displaystyle\int_c^t \varphi_{m2}(u)du & \dots & \displaystyle\int_c^t \varphi_{mn}(u)du \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de todas las matrices, se define las siguientes operaciones en $\mathcal{M}$:

1. Suma de matrices. Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices del mismo orden. La suma de A con B se define como

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

2. Producto de una matriz con un número real. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz y λ un número real. El producto de λ con A se define como

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}).$$

3. Producto de matrices. Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices de orden $m \times n$ y $n \times p$ respectivamente. El producto de A con B se define como

$$AB = (c_{ij})_{m\times p}, \text{ donde } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Definición 3.10. *Sea A una matriz cuadrada de orden n. Se dice que A es invertible si existe una matriz B tal que $AB = BA = I$.*

Naturalmente la matriz B de la definición 3.10 tiene que ser del mismo orden que la matriz A. Además, la matriz B se la llama matriz inversa de A y se la denota con A^{-1}.

Por ejemplo, la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ tiene matriz inversa

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/5 \\ -1/4 & 1/20 \end{bmatrix},$$

y la matriz $\varphi(t) = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t & \cos t \\ \cos t & -\operatorname{sen} t \end{bmatrix}$ tiene matriz inversa

$$\varphi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t & \cos t \\ \cos t & -\operatorname{sen} t \end{bmatrix}.$$

Observación 3.8. *Cuando A es una matriz función, el concepto de matriz inversa de A está supeditado a un intervalo I. Es decir, se habla de la matriz inversa de A en el intervalo I. Si no existe confución, se dirá simplemente matriz inversa aún en el caso de una matriz función.*

Ahora exponemos un método para hallar la matriz inversa de una matriz A. Antes necesitamos dar las siguientes definiciones:

Definición 3.11. *Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$, M_{ij} es la matriz de orden $(n-1)\times(n-1)$ que se obtiene de la matriz A eliminando la i-ésima fila y la j-ésima columna de A. El determinante de la matriz A, denotado como $\det A$, se define recursivamente como sigue:*

- *Si $n = 1$, entonces $\det A = a_{11}$,*
- *Si $n \geq 2$, entonces $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}$, donde el subíndice i es arbitrario pero permanece fijo en todo el cálculo.*

Ejemplo 3.3. *Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.*

Solución. Para realizar el cálculo del determinante de A fijemos la primera fila[3]. Es decir mantenemos fijo el valor de $i = 1$. Se tiene que $M_{11} = [a_{22}]$, $M_{12} = [a_{21}]$. Luego

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^{2} (-1)^{1+j} a_{1j} \det M_{1j} \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} \det M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

El ejemplo anterior muestra la forma clásica de calcular el determinante de una matriz cuadrada de orden 2.

Observación 3.9. *En realidad, el determinante es una función cuyo dominio es el conjunto de todas las matrices cuadradas y cuyo recorrido es el conjunto de los números reales. Es decir, si $\mathfrak{M}_c$ denota el conjunto de todas las matrices cuadradas, entonces el determinante es la función definida como:*

$$\begin{aligned} \det \colon \mathfrak{M}_c &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \det A, \end{aligned}$$

donde $\det A$ *es como en la definición 3.11.*

Definición 3.12. *Sea A una matriz cuadrada de orden n, a_{ij} el elemento de la i-ésima fila y la j-ésima columna de A.*

1. *El menor de a_{ij}, denotado m_{ij}, es el determinante de la matriz M_{ij} (ver definición 3.11).*
2. *El cofactor c_{ij} de a_{ij} está definido como $c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$.*
3. *La matriz de los cofactores de los elementos de A, denotada* $\operatorname{cof} A$, *está definida como la matriz que se obtiene de A reemplazando los elementos a_{ij} por c_{ij} para $1 \leq i, j \leq n$.*

Ejemplo 3.4. *Sea* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, *hallar* $\operatorname{cof} A$.

[3] Se deja como ejercicio comprobar que: fijando la segunda fila, se obtiene el mismo resultado.

Solución. Primero realizamos el cálculo del cofactor de a_{11}:

$$\begin{aligned} c_{11} &= (-1)^2 m_{11} \\ &= \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \\ &= 19. \end{aligned}$$

De la misma manera vemos que (realizar los cálculos) $c_{12} = -8$, $c_{13} = 26$, $c_{21} - 7$, $c_{22} = 4$, $c_{23} = -10$, $c_{31} = 1$, $c_{32} = 0$, $c_{33} = 2$. Luego

$$\operatorname{cof} A = \begin{bmatrix} 19 & -8 & 26 \\ -7 & 4 & -10 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Definición 3.13. *Sea A una matriz cuadrada,* $\operatorname{cof} A$ *la matriz de los cofactores de A. Se llama matriz adjunta de A a la siguiente matriz:*

$$\operatorname{Adj} A = (\operatorname{cof} A)^T$$

El siguiente teorema nos proporciona una condición necesaria y suficiente para la existencia de la inversa de una matriz. Además, nos dice cómo calcular la inversa de una matriz (cuando existe).

Teorema 3.2. *Sea A una matriz cuadrada. Si* $\det A \neq 0$, *entonces existe la inversa de A. Además, la matriz inversa de A está dada por*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{Adj} A.$$

Ejemplo 3.5. *Calcular (si existe) la matriz inversa de* $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Solución. Primero veamos si tiene sentido calcular A^{-1}. Como $\det A = 19$, existe la matriz inversa de A. Para hallar A^{-1} primero calculemos los cofactores de A: $c_{11} = 5$, $c_{12} = -2$, $c_{21} = 2$, $c_{22} = 3$. Con estos valores se tiene que la matriz de los cofactores de A es la matriz $\operatorname{cof} A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Luego, la matriz adjunta de A es

$\text{Adj}\, A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. Finalmente calculamos la matriz inversa

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \text{Adj}\, A \\ &= \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5/19 & 2/19 \\ -2/19 & 3/19 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Valores y vectores propios

Sea A una matriz constante de orden n. Cosideremos la ecuación

$$Ax = \lambda x, \tag{3.12}$$

donde λ es un número real y x es un vector (la incógnita).

Es trivial ver que el vector nulo es solución de la ecuación 3.12. Estamos interesados en dar solución al siguiente problema:

Problema 3.1. *Dada una matriz constante A y un número real λ. Hallar una solución no trivial de la ecuación $Ax = \lambda x$.*

Por ejemplo, el vector

$$x = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

es una solución (no trivial) de la ecuación 3.12 para $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $\lambda = 4$.

Antes de resolver el problema 3.1 necesitamos dar la siguiente definición:

Definición 3.14. *Un valor propio (o eigenvalor) de una matriz A es un número λ para el cual la ecuación $Ax = \lambda x$ tiene solución x no trivial.*

Sea λ un valor propio de la matriz A. La solución no nula x de la ecuación $Ax = \lambda x$ se llama vector propio (o eigenvector) asociado a λ. Por ejemplo, el vector

$x = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ es un vector propio asociado a $\lambda = 4$ ya que este valor de λ es un valor propio de la matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Observación 3.10. *La definición 3.14 toma en cuenta matrices de orden $m \times n$. Sin embargo, en este texto solamente consideramos matrices cuadradas.*

Para hallar los valores propios de una matriz A se procede de la siguiente manera: sea λ_0 un valor propio de la matriz A, luego existe un vector no nulo x_0 tal que la igualdad $Ax_0 = \lambda_0 x_0 = \lambda_0 I x_0$ (donde I es la matriz identidad) se satisface. Luego $(A - \lambda_0 I)x_0 = 0$. Por tanto, el sistema lineal $(A - \lambda I)x = 0$ tiene al menos dos soluciones, a saber: la solución trivial y la solución no nula x_0, luego $\det(A - \lambda I) = 0$. Puesto que $\det(A - \lambda I)$ representa un polinomio de grado n (el orden de la matriz A), denotado por p_A, se tiene que: los valores propios de la matriz A son todos y solamente las soluciones de la ecuación algebraica $p_A = 0$.

Observación 3.11. *Puesto que p_A es un polinomio de grado n se tiene que: una matriz de orden n tiene exactamente n valores propios.*

Para hallar los vectores propios asociados al valor propio λ se tienen que calcular las soluciones no nulas del sistema lineal $(A - \lambda I)x = 0$. Notamos que existen infinitos vectores propios asociados a un único valor propio λ.

Ejemplo 3.6. *Hallar los valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.*

Solución. Primero vemos cual es el polinomio p_A:

$$\begin{aligned} p_A &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (1-\lambda)^2 - 4 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 3. \end{aligned}$$

Ahora calculamos las raíces del polinomio p_A, es decir, calculamos las soluciones de la ecuación $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$. Realizando los cálculos tenemos $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$, como los valores propios de la matriz A son las soluciones de la ecuación $p_A = 0$ tenemos que los valores propios de la matriz A son 3 y -1.

Calculamos los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = 3$. Para hacer clara la exposición, denotamos al vector x por $x = (x_1, x_2)^T$. Los vectores propios son las soluciones no triviales del sistema lineal $(A - 3I)x = 0$. Es decir, los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = 3$ son las soluciones no nulas del sistema

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Puesto que las ecuaciones del sistema anterior son similares[4] se tiene que el valor de una incógnita depende de la otra. En efecto, tenemos que $x_1 = x_2$. Luego los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = 3$ tienen la forma $x = (a, a)$ donde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

De la misma forma (realizar los cálculos) se tiene que los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_2 = -1$ tienen la forma $x = (a, -a)$ donde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

El método matricial

Ahora presentamos una técnica para hallar las soluciones de un sistema normal de ecuaciones diferenciales (ver definición 3.4, pag. 130) que además es homogéneo y tiene los coeficientes constantes. Es decir, sistemas de la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n(t). \end{cases} \tag{3.13}$$

[4]Dos ecuaciones se dicen similares si y solo si tienen las mismas soluciones. Luego, una ecuación se obtiene de la otra multilicándola por un número real diferente de cero.

Observamos que: si escribimos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ y } \overrightarrow{x(t)} = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T,$$

entonces el sistema 3.13 se puede escribir como

$$\frac{d\overrightarrow{x(t)}}{dt} = A\overrightarrow{x}. \tag{3.14}$$

La ecuación 3.14 se llama *ecuación diferencial vectorial asociada al sistema* 3.13.

Observación 3.12. *Se puede demostrar que: si $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ son vectores solución linealmente independientes (ver definición 2.3 del capítulo 2, pag. 66) de la ecuación 3.14, entonces $\alpha_1\varphi_1 + \dots + \alpha_m\varphi_m$ también es solución de la ecuación 3.14.*

La siguiente definición es una generalización de la definición 2.4 del capítulo 2 (ver pag. 68).

Definición 3.15. *Sean $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ vectores solución de la ecuación diferencial vectorial 3.14 en el intervalo I (ver definición 3.3). El conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ se llama conjunto fundamental de soluciones de la ecuación 3.14 en el intervalo I si y solo si $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ son vectores linealmente independientes en el intervalo I y cualquier solución de la ecuación diferencial vectorial se puede expresar de la forma*

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n,$$

donde $c_1, c_2, \dots, c_n$ son constantes arbitrarias. Además, la suma anterior se llama solución general de la ecuación diferencial 3.14 en el intervalo I.

Se puede demostrar que el conjunto fundamental de soluciones de la ecuación 3.14 tiene cardinalidad n. Luego, para hallar la solución general, es suficiente con encontrar un conjunto de n soluciones linealmente independientes.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.3. *Consideremos la ecuación diferencial vectorial*

$$\frac{d\overrightarrow{x(t)}}{dt} = A\overrightarrow{x}, \tag{3.15}$$

donde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ *y* $\overrightarrow{x(t)} = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$.

Si λ es un valor propio de la matriz A, entonces el vector $\alpha e^{\lambda t}$, donde α es un vector propio asociado al valor propio λ, es solución de la ecuación diferencial vectorial.

En la literatura matemática se puede hallar el siguiente resultado referente a la teoría de los valores propios de una matriz y sus correspondientes vectores propios asociados:

Teorema 3.4 (Valores propios diferentes)**.** *Sean λ_1, λ_2 valores propios de la matriz A con vectores propios asociados φ_1, φ_2 respectivamente. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces φ_1 y φ_2 son linealmente independientes.*

Naturalmente, cuando φ_1 y φ_2 son vectores linealmente independientes también los vectores $\varphi_1 e^{\lambda t}$ y $\varphi_2 e^{\lambda t}$ son linealmente independientes para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Luego se tiene el siguiente corolario:

Corolario 3.1. *Si los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de la matriz A son todos diferentes, entonces el vector*

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i e^{\lambda_i t}$$

es la solución general de la ecuación diferencial vectorial 3.15, donde α_i son vectores propios asociados a los valores propios λ_i y c_i son constantes arbitrarias.

Ejemplo 3.7. *Hallar la solución general del siguiente sistema:*

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 7x_1 - x_2 + 6x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -10x_1 + 4x_2 - 12x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -2x_1 + x_2 - x_3. \end{cases}$$

Solución. Ponemos $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Se tiene que los valores propios de la matriz A son $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5$ (realizar los cálculos). Los vectores propios asociados a λ_1. λ_2 y λ_3 son los vectores $\alpha_1 = (1, -1, -1)^T$, $\alpha_2 = (1, -2, -1)^T$ y $\alpha_3 = (3, -6, -2)^T$ (recordamos que estos vectores no son únicos; así, el lector puede tener otros vectores propios. Lo importante es que estén calculados de forma correcta).

Por los teoremas 3.3, 3.4 y el coroloario 3.1, la solución general del sistema es:

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \sum_{i=1}^{3} c_i \alpha_i e^{\lambda_i t} \\
&= c_1(1, -1, -1)^T e^{2t} + c_2(1, -2, -1)^T e^{3t} + c_3(3, -6, -2)^T e^{5t} \\
&= c_1(e^{2t}, -e^{2t}, -e^{2t})^T + c_2(e^{3t}, -2e^{3t}, -e^{3t})^T + c_3(3e^{5t}, -6e^{5t}, -2e^{5t})^T.
\end{aligned}$$

Observamos que otra manera de escribir la solución general del sistema es:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + 3c_3 e^{5t}, \\
x_2(t) &= -c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{3t} - 6c_3 e^{5t}, \\
x_3(t) &= -ce^{2t} - c_2 e^{3t} - 2c_3 e^{5t}.
\end{aligned}$$

Observación 3.13. *El corolario 3.1 hace referencia a valores propios diferentes de la matriz A, pero estos pueden ser valores complejos. En tal caso, se tendrá que, si $\lambda_j = a + bi$ es un valor propio de la matriz A para algún $1 \leq j \leq n$, entonces $\overline{\lambda_j} = a - bi$ también es un valor propio de la matriz A (recordamos que las raíces complejas de un polinomio siempre vienen en pares: una conjugada de la otra).*

Para el caso de valores propios complejos se puede demostrar que el vector solución de la ecuación diferencial vectorial, asociado al valor propio $\lambda = a + bi$, tiene la forma $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$, donde las componentes de $\varphi(t)$ están dadas por

$$\varphi_k(t) = e^{at}(c_1(\alpha_k \cos bt - \beta_k \operatorname{sen} bt) + c_2(\alpha_k \operatorname{sen} bt + \beta_k \cos bt)), \tag{3.16}$$

para $1 \leq k \leq n$.

Observación 3.14. *En la ecuación 3.16 aparecen las constante arbitrarias c_1, c_2 y las constantes α_k, β_k que se tiene que determinar (ver ejemplo 3.8).*

Ejemplo 3.8. *Hallar la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -5x + y. \end{cases}$$

Solución. Para este sistema de ecuaciones diferenciales se tiene que $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$. Luego, los valores propios de la matriz A son $\lambda_1 = 2 + 3i$, $\lambda_2 = 2 - 3i$ (realizar los cálculos). Para hallar las constantes α_1, α_2 y β_1, β_2 precedemos de la siguiente manera: suponemos que las soluciones del sistema son de la forma[5]:

$$\psi_1(t) = \mathfrak{A}e^{\lambda_1 t},$$
$$\psi_2(t) = \mathfrak{B}e^{\lambda_1 t}.$$

Derivando y reemplazando en el sistema obtenemos:

$$\mathfrak{A}\lambda_1 e^{\lambda_1 t} = 3\mathfrak{A}e^{\lambda_1 t} + 2\mathfrak{B}e^{\lambda_1 t},$$
$$\mathfrak{B}\lambda_1 e^{\lambda_1 t} = -5\mathfrak{A}e^{\lambda_1 t} + \mathfrak{B}e^{\lambda_1 t}.$$

Reemplazando el valor de λ_1, las últimas ecuaciones nos conducen al sistema (en las incógnitas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$):

$$\begin{cases} (1 - 3i)\mathfrak{A} + 2\mathfrak{B} = 0 \\ -5\mathfrak{A} - (1 + 3i)\mathfrak{B} = 0 \end{cases}$$

Se puede verificar fácilmente que $\mathfrak{A} = 1$ y $\mathfrak{B} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ son soluciones del sistema anterior. Sustituyendo los valores de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ en las soluciones $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ tenemos:

$$\psi_1(t) = e^{(2+3i)t},$$
$$\psi_2(t) = (-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i)e^{(2+3i)t}.$$

[5]Estas soluciones son complejas pero, en el transcurso de los cálculos, se verá como se generan las soluciones reales del sistema de ecuaciones diferenciales.

Usando la fórmula de Euler, estas soluciones toman la forma:

$$\psi_1(t) = e^{2t}(\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t),$$
$$\psi_2(t) = e^{2t}\left[-\frac{1}{2}\cos 3t + \frac{3}{2}\operatorname{sen} 3t + i\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 3t - \frac{3}{2}\cos 3t\right)\right].$$

Se puede demostrar que las partes real e imaginaria de las soluciones complejas ψ_1, ψ_2 son también soluciones linealmente independientes del sistema. Luego, la combinación lineal de estas soluciones también es una solución del sistema[6] (ver observación 3.12). Así, las soluciones reales del sistema están dadas por:

$$\varphi_1(t) = e^{2t}(c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t),$$
$$\varphi_2(t) = e^{2t}\left[c_1\left(-\frac{1}{2}\cos 3t + \frac{3}{2}\operatorname{sen} 3t\right) + c_2\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 3t - \frac{3}{2}\cos 3t\right)\right].$$

Podemos concluir que $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = -\frac{3}{2}$

Observación 3.15. *La conclución del corolario 3.1 nos dice como es la solución general de la ecuación 3.15, todo esto bajo la condición de que todos los valores propios (reales y/o complejos) de la matriz A sean diferentes. Cuando los valores propios tienen multiplicidad no queda garantizado que las n soluciones del sistema fundamental de soluciones tengan la forma $\alpha e^{\lambda t}$ donde λ es un valor propio múltiple y α es un vector propio asociado a λ.*

Se puede demostrar que: si A es una matriz de orden n y λ es un valor propio de multiplicidad m, donde $1 < m \leq n$, entonces existen p vectores propios asociados al valor propio λ donde $1 \leq p \leq m$. Nosotros consideramos los dos casos: (1) $p = m$ y (2) $p < m$.

En el caso (1), $p = m$, existem m vectores propios linealmente independientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ asociados al valor propio λ; luego, los vectores $\alpha_1 e^{\lambda t}, \ldots, \alpha_m e^{\lambda t}$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación 3.15.

Observación 3.16. *Se puede demostrar que un tipo especial de ecuación diferencial vectorial que siempre lleva a este caso ($p = m$) es aquel en el cual la matriz A es simétrica, es decir, cuando la matriz A es tal que $A = A^T$.*

[6] La combinación lineal se debe hacer entre las partes real y la imaginaria de cada solución compleja.

Ahora explicamos muy someramente el caso (2), $p < m$. Para una explicación más detallada recomendamos la lectura de un texto más especializado de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, Braun [BR, cap. 3].

Sea λ un valor propio de la matriz A cuya multiplicidad es m. Si $p = 1$, entonces existen m vectores linealmente independientes (que son solución de la ecuación diferencial vectorial 3.15) de la forma $\varphi_1(t) = \alpha_1 e^{\lambda t}$ tal que $(A - \lambda I)\alpha_1 = 0$ y para todo j tal que $2 \leq j \leq m$,

$$\varphi_j(t) = \left(\alpha_1 \frac{t^{m-1}}{(j-1)!} + \alpha_2 \frac{t^{m-2}}{(j-2)!} + \ldots + \alpha_j\right) e^{\lambda t},$$

tal que $(A - \lambda I)\alpha_{j-1} = \alpha_j$.

Observación 3.17. *Para el caso $2 \leq p < m$ se procede de manera similar, pero no se trata en este texto introductorio.*

Para finalizar esta sección, consideramos el siguiente problema:

Problema 3.2. *Hallar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales $\dfrac{d\overrightarrow{x(t)}}{dt} = A\vec{x}$ tal que $\overrightarrow{x(t_0)} = \vec{x_0}$.*

Notamos que el problema 3.2 tiene la misma estructura que el problema con condiciones iniciales (o condiciones de frontera) formado por la ecuación diferencial $\dfrac{dx}{dt} = ax$ y la condición inicial (condición en la frontera) $x(t_0) = x_0$ cuya solución es $x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}$ (ver la sección 1.2 del capítulo 1, específicamente la definición 1.6 de la pag. 34 y los párrafos que siguen a esta definicón). Luego, por analogía, la solución del problema 3.2 tendría que ser el vector $\overrightarrow{x(t)}$ definido por la siguiente ecuación:

$$\overrightarrow{x(t)} = \vec{x_0} e^{(t-t_0)A}. \tag{3.17}$$

La ecuación 3.17 contiene un término de la forma $e^{\mathfrak{A}}$, donde $\mathfrak{A}$ es una matriz cuadrada. El término $e^{\mathfrak{A}}$ se llama exponencial de una matriz y es una función que generaliza la función exponencial (real o compleja) usual. Es decir, es una función que satisface las siguientes propiedades (como mínimo):

1. Para todo $s, t \in \mathbb{C}$ se cumple $e^{s\mathfrak{A}} e^{t\mathfrak{A}} = e^{(s+t)\mathfrak{A}}$.

2. $e^{\mathfrak{o}} = I$, donde $\mathfrak{o}$ es la matriz nula, I es la matriz identidad.

3. $\dfrac{d}{dt}\left(e^{t\mathfrak{A}}\right) = te^{t\mathfrak{A}}$.

En la literatura matemÃ¡tica se puede hallar la siguiente definición para la exponencial de una matriz.

Definición 3.16 (Exponencial de una matriz)**.** *Sea* $\mathfrak{A}$ *una matriz cuadrada con entradas complejas, definimos la exponencial de* $\mathfrak{A}$ *como la matriz*

$$e^{\mathfrak{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{A}^k}{k!} = I + \mathfrak{A} + \frac{1}{2!}\mathfrak{A}^2 + \frac{1}{3!}\mathfrak{A}^3 + \dots$$

Se puede demostrar que la definición 3.16 garantiza el cumplimiento de las tres propiedades exigidas a la exponencial de una matriz. Para el lector interesado en este tema le recomendamos Klain [KLD] y Apostol [AT].

Ejercicios

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

1. $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 - x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 4x_1 + x_2 - 4x_3. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 - x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2 + x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -3x_1 - 6x_2 + 6x_3. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 + 2x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 3x_2, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 2x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 9x_2 + 9x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 19x_2 + 18x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 9x_2 + 10x_3. \end{cases}$$

Bibliografía

[AT] Apostol, T. (1969). *Calculus Vol. 2*. New York: John Wiley & Sons.

[BE] Becerril, J. y Elizarraraz, D. (2004). *Ecuaciones diferenciales, técnicas de solución y aplicaciones*. México: Universidad Autónoma Metropolitana.

[BP] Blanchard, P. , Devaney, R. y Hall, G. (1999). *Ecuaciones diferenciales*. México: International Thomson Editores.

[BM] Bôcher, M. (1901). *Certain Cases in Which the Vanishing of the Wronskian is a Sufficient Condition for Linear Dependence*. Transactions of the American Mathematical Society, 2(2), 139-149. doi:10.2307/1986214

[BD] Boyce, W y DiPrima, R. (2000). *Ecuaciones diferenciales y problemas con condiciones en la frontera*. México: Limusa.

[BR] Braun, M. (1990). *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

[CI] Carmona, I. y Filio, E. (2011). *Ecuaciones diferenciales*. México: Pearson.

[CR] Courant, R. y Fritz, J. (1996). *Introducción al calculo y al análisis matemático Vol. II*. México: Limusa.

[EJ] Escobar, J. (2004). *Ecuaciones diferenciales*. Recuperado de http://matematicas.udea.edu.co/∼ jescobar/

[KLD] Klain, D. (2017). *The Matrix Exponential (with exercises)*. Recuperado de http://faculty.uml.edu/dklain/exponential.pdf

[KD] Kreider, D. Kuller, R. y Ostberg, D. (1973). *Ecuaciones diferenciales*. Fondo Educativo Interamericano, S. A.

[KE] Kreyszig, E. (1991). *Matemáticas avanzadas para ingeniería, Vol. 1*. México: Limusa

[MK] Makarenko, G. , Kiseliov, A. y Krasnov, M. (1984). *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Moscú: Mir.

[OP] O'Neil, P. (1997). *Matemáticas avanzadas para ingeniería, Vol. 1.* México: Compañía Editorial Continental, S. A. de C. V.

[RS] Ross, S. (1981). *Ecuaciones diferenciales.* Barcelona: Reverte

[MS] Spiegel, M. (1983). *Ecuaciones diferenciales aplicadas.* New York: Prentice Hall.

[ZD] Zill, D. (2009). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado* (9 ª ed.). México: CENGAGE Learning.

La teoría de las ecuaciones diferenciales es una aplicación directa del cálculo diferencial e integral. El cálculo diferencial es una herramienta poderosa para la construcción de modelos matemáticos de problemas en los cuales están involucrados la variación de una o varias variables, las dependientes, con respecto a otra u otras variables, las independientes.

Determinar el crecimiento poblacional, calcular el decaimiento radioactivo, hallar la edad de un fósil son problemas en los cuales se utiliza el cálculo diferencial para el planteamiento de un modelo matemático.

El modelo matemático que se construye para hallar la solución de un problema particular deja planteado un nuevo problema: ¿qué herramientas se deben utilizar para hallar la solución del modelo matemático? Esta herramienta son las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Leonidas Cerda Romero. Profesional con más de 20 años de experiencia en docencia, doctor en Matemáticas por la Universidad de Concepción, Chile. En la actualidad su área de investigación es la teoría de números y su relación con la lógica matemática.

Janneth Morocho Yaucán. Profesional con más de 20 años de experiencia en docencia, con una maestría en Estadística Aplicada de la Universidad de Granada, España. En la actualidad su investigación está encaminada en cuantificar el impacto de la implementación de nuevas metodologías de enseñanza-aprendizaje.



ISBN: 978-9942-35-642-0
9 789942 356420

